

Fərman Məmmədov
Fikrət İbiyev
Əflatun Aslanov

**EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ
VƏ
RİYAZİ STATİSTİKANIN
ELEMENTLƏRİ**

Σ

$$D(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{9,13} \approx 3,025$$



$$D(X) = \sum [x_i - M(X)]^2 p_i$$

σ

$$\frac{x}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \frac{x}{n}$$

$$|\bar{X} - \bar{X}| = \sum_i x_i \cdot X p_i$$

$$T_n = A_n = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B/A_i)$$

$$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n} + \dots + \frac{n_k}{n}$$



**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
AZƏRBAYCAN DİLLƏR UNİVERSİTETİ**

**FƏRMAN MƏMMƏDOV
FİKRƏT İBİYEV
ƏFLATUN ASLANOV**

**EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ və
RİYAZİ STATİSTİKANIN
ELEMENTLƏRİ**

(Ali məktəblər üçün dərs vəsaiti)

*Təhsil nazirinin 15.02.213-cü il tarixli
270 sayılı qərarı ilə təsdiq edilmişdir*

BAKİ – 2013

Məmmədov F.O. , İbiyev F.T., Aslanov Ə.Q.

Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın elementləri, Dərs vəsaiti, Radius, 2013, 160 səh.

Elmi redaktor: Dövlət İdarəçilik Akademiyası
Dövlət idarəçiliyində informasiya
texnologiyaları kafedrasının
dosenti, f.-p.e.n. , A. İ. Mehdiəliyev

Rəyçilər: Azərbaycan Dillər Universiteti
Riyaziyyat və informatika kafedrasının
dosenti, f.-r.e.n. , H.M.Quliyev

Bakı Slavyan Universiteti
Riyaziyyat və İnformatika kafedrasının
müdiri, **f.-r.e.n. , dos. R.Eyyubov**

Dərs vəsaiti ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın əsas anlayışları və elementləri ilə ilkin tanışlıq və müvafiq praktik məsələləri həlletmək vərdişlərinin inkişaf etdirilməsi üçün nəzərdə tutulmuşdur.

Əsas diqqət fənn proqramda nəzərdə tutulmuş nəzəri və praktiki materiallardan ibarət olan mövzuların ətraflı və anlaşıqlı şəkildə şərh olunmasına yönəldilmişdir. Hər bir mövzuya uyğun misalların izahlı həlli verilmişdir.

Kitab ADU-nun “İbtidai sinif müəllimliyi” ixtisası üzrə təhsil alan, həmçinin “Regionşünaslıq və beynəlxalq münasibətlər” fakültəsinin tələbələri üçün nəzərdə tutulmuşdur. Kitabdan müəllimlər, eləcə də ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanı müstəqil öyrənmək istəyənlər istifadə edə bilərlər.

M Ü N D Ə R İ C A T

Müqəddimə	5
Fəsil 1. Birləşmələr	7
§1.1. Kombinatorikanın əsas qaydaları	8
1. Cəm qaydası	8
2. Hasil qaydası	9
§1.2. Aranjeman	10
§1.3. Permutasion	14
§1.4. Aranjemanlar sayı düsturunun başqa şəkli.....	17
§1.5. Kombinezon	19
<i>I fəslə aid çalışmalar</i>	27
Fəsil 2. Ehtimal nəzəriyyəsinin elementləri.	32
§2.1. Hadisələr və onların növləri.....	33
§2.2. Ehtimalın tərifı. Tezlik anlayışı.....	38
1. Ehtimalın klassik tərifı	38
2. Tezlik anlayışı	45
§2.3. Ehtimalın xassələri.....	46
§2.4. Ehtimalların cəmi və hasili haqqında teoremlər..	48
1. Hadisələrin cəmi və hasili.....	48
2. Toplama teoremi	51
3. Asılı və asılı olmayan hadisələr. Şərti ehtimal....	58
4. Ehtimalların vurulması	65
§2.5. Tam ehtimal düsturu	77
§2.6. Bernulli düsturu	81
§2.7. Təsadüfi kəmiyyət və onun paylanması	86
§2.8. Təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları.....	94
1. Riyazi gözləmə	95
2. Dispersiya	99
3. Orta kvadratik meyl	109
<i>II fəslə aid çalışmalar</i>	111
Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri	115

§3.1. Statistika haqqında anlayış. Riyazi statistikanın predemeti.....	115
§3.2. Riyazi statistikanın əsas anlayışları: Statistik yığımlar. Baş və seçmə yığım.....	119
§3.3. Statistik verilənlərin təsvir olunma və emal üsulları.....	121
§3.4. Seçmənin qrafik təsviri. Poliqon və histoqram.....	126
§3.5. Seçmənin ədədi xarakteristikaları	139
1. Ədədi orta.....	140
2. Median.....	142
3. Moda.....	145
4. Səpələnmə xarakteristikaları.....	148
I. Variasiya genişliyi.....	148
II. Seçmə dispersiya.....	149
III. Variasiya əmsalı.....	151
<i>III fəslə aid çalışmalar</i>	155
<i>Ədəbiyyat</i>	160

Müqəddimə

Məşhur Amerika alimi Kasın belə bir kəlamı var: “Bu gün ehtimal nəzəriyyəsi bütün təbiət elmlərinin təməl daşı, statistika isə insan fəaliyyətinin bütün sahələrinin ayrılmaz hissəsidir”. Bu sözlər ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın əhəmiyyətini tam dəqiqliyi ilə əks etdirir.

Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika sahəsində minimum səviyyədə müəyyən biliyə malik olmadan istənilən sosial, iqtisadi və siyasi məlumatları başa düşmək və bununla da əsaslandırılmış qərarlar vermək çox çətindir.

Hazırda ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikadan təkcə riyaziyyatçılar deyil, mühəndis, həkim, iqtisadçı, biolog, fizik, geoloq və s. mütəxəssislər də istifadə edirlər. Odur ki, bu elmlərin əsaslarının orta təhsil sisteminə daxil edilməsi, o cümlədən, ibtidai siniflərdə ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın ilkin anlayışları və başlanğıc elementlərinin tədris proqramlarında yer alması heç də təsadüfi deyildir.

Dərs vəsaiti ADU-nun bakalavr pilləsində “İbtidai sinif müəllimliyi” ixtisası üzrə təhsil alan tələbələr üçün tədris edilən “Riyaziyyatın ibtidai kursunun nəzəri əsasları” fənninin proqramına uyğun olaraq hazırlanmışdır. Belə ki, yeni kurikulum standartlarının tələblərinə uyğun olaraq ibtidai siniflərdə tədris olunan Riyaziyyat fənninin proqramına digər mövzularla yanaşı ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın ilkin anlayışları və başlanğıc elementlərindən müəyyən mövzular daxil edilmişdir. Odur ki, “İbtidai sinif müəllimliyi” ixtisasına yiyələnmək istəyən tələbələrin öyrəndiyi “Riyaziyyatın ibtidai kursunun nəzəri əsasları” fənninin proqramında bu nəzərə alınmış və ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikadan müvafiq mövzular proqramda öz əksini tapmışdır. Yəni “Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın elementləri”

“İbtidai sinif müəllimliyi” ixtisası üzrə təhsil alan bakalavrlara “Riyaziyyatın ibtidai kursunun nəzəri əsasları” fənninin tərkib hissəsi kimi tədris edilir. Bununla yanaşı vəsaitdən Regionşünaslıq və beynəlxalq münasibətlər fakültəsinin tələbələri də istifadə edə bilərlər.

Dərs vəsaiti ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın mühüm anlayış və elementlərinə həsr edilmişdir.

Vəsait üç fəsildən ibarətdir. Birinci fəsildə birləşmələr nəzəriyyəsinə baxılır. Burada təkrarsız aranjemanlar, təkrarsız permutasionlar və təkrarsız kombinezonlar şərh edilir.

İkinci fəsildə fənn proqramının məzmununa uyğun olaraq ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayış və elementləri şərh olunur. O cümlədən, hadisələr və onların növləri, ehtimalın klassik tərif və xassələri, ehtimalların cəmi və hasili, təsadüfi kəmiyyət və onun pıylanması, təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları və s. məsələlərə baxılır.

Üçüncü fəsildə riyazi statistikadan mühüm anlayış və elementlər nəzərdən keçirilir. Belə ki, ilkin statistik anlayışlar şərh olunduqdan sonra vəsaitdə statistik verilənlərin təsviri və emal üsulları, seçmə yığımın qrafik təsviri, seçmənin ədədi xarakteristikaları və s. məsələlərə yer verilir.

Hər üç fəsildə bütün nəzəri materiallar müvafiq misallarla möhkəmləndirilir.

Ümid edirik ki, dərs vəsaiti digər ixtisaslar üzrə təhsil alan tələbələr üçün də faydalı ola bilər.

Müəlliflər

Fəsil 1. Birləşmələr

Riyaziyyatda və eləcə də digər elm sahələrində müəyyən sonlu çoxluğun elementlərindən konkret şərtləri ödəyən müxtəlif kombinasiyalar (birləşmələr) düzəltmək və bu kombinasiyaların sayını hesablamaq tələb edən məsələlər tez-tez rast gəlinir. Belə məsələlərə *kombinatorika* məsələləri deyilir. Riyaziyyatın bu cür məsələlərlə məşğul olan bölməsi *kombinatorika* adlanır.

Ehtimal nəzəriyyəsinə aid məsələlərin həllində kombinatorika məsələləri geniş tətbiq edilir. O cümlədən, ehtimalın klassik tərifindən istifadə etməklə məsələlər həll edərkən, eləcə də digər hallarda bəzi kombinatorika düsturlarından istifadə edilir.

T ə r i f. Müəyyən əşyalardan düzəlmiş və bir-birindən həmin əşyaların sırası və ya müxtəlifliyi ilə fərqlənən qruplara *birləşmələr* deyilir. Birləşmələri əmələ gətirən əşyalar onun elementləri adlanır.

Beləliklə, sonlu sayda elementi olan hər hansı çoxluğun elementlərindən yalnız düzülüş sırasına görə, ya da yalnız elementlərinin müxtəlifliyinə görə fərqlənən qruplar düzəltmək olar. Məsələn, **{1, 2, 3, 4, 5, 6}** çoxluğunun elementləri olan rəqəmlərdən müxtəlif qruplar düzəldə bilərik. Bu halda alınan qruplar həmin rəqəmlərin müxtəlif birləşmələri olacaq. Məsələn, 41, 56, 254, 452, 1534, 3542 və s. Bu birləşmələrin bəziləri yalnız rəqəmlərinin düzülüşünə (sırasına), bəziləri isə rəqəmlərinin müxtəlif olmasına görə bir-birindən fərqlənirlər. Beləliklə, düzəlmə qaydalarından asılı olaraq birləşmələrin üç növünü qeyd etmək olar: *aranjeman*, *permutasion* və *kombinezon*.

Fəsil 1. Birləşmələr

§ 1.1. Kombinatorikanın əsas qaydaları

Bir çox kombinatorika məsələlərinin həllində iki mühüm qaydadan istifadə olunur. Bu qaydalar cəm qaydası və hasil qaydası adlanır.

Qeyd etmək lazımdır ki, iki kəsişməyən sonlu çoxluğun birləşməsindəki elementlərin sayının tapılması qaydasına kombinatorikada cəm qaydası və iki sonlu çoxluğun dekart hasilindəki elementlərin sayının tapılması qaydasına isə hasil qaydası deyilir.

1.Cəm qaydası. Əgər hər hansı x elementini m müxtəlif üsulla və bundan asılı olmadan y elementini də n müxtəlif üsulla seçmək mümkün olarsa, o halda bu elementlərdən birini (x və ya y -i) $m+n$ sayda üsulla seçmək olar.

M ə s ə l ə 1. Tutaq ki, boşqabda 4 alma və 5 armud var. Neçə müxtəlif üsulla bu meyvələrdən birini (alma və ya armudu) seçmək olar?

H ə l l i. Aydındır ki, bir almanı 4 üsulla seçmək olar. Eləcə də bir armud 5 üsulla seçilə bilər. Onda bu meyvələrdən birini $N=4+5=9$ üsulla seçib götürmək olar.

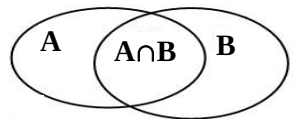
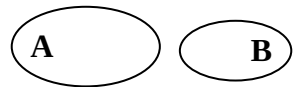
Cəm qaydasını çoxluqlar nəzəriyyəsi dilində də vermək olar.

Qayda: Kəsişməyən, sonlu A və B çoxluqlarının birləşməsinə daxil olan elementlərin sayı A və B çoxluqlarının elementləri sayının cəminə bərabərdir:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B),$$

burada $n(A)$ və $n(B)$ uyğun olaraq A və B çoxluqlarının elementlərinin sayını göstərir.

Qayda: Sonlu, kəsişən A və B çoxluqlarının birləşməsinə daxil olan elementlərin sayı A və B çoxluqlarının



Fəsil 1. Birləşmələr

elementləri sayının cəmi ilə onların ortaq (kəsişmədəki) elementlərinin sayı fərqi bərabərdir:

$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

2. Hasil qaydası. Əgər hər hansı x elementini m müxtəlif üsulla və bundan asılı olmadan y elementini n müxtəlif üsulla seçmək mümkündürsə, o halda (x, y) cütünü $(x \text{ və } y\text{-i})$ $m \cdot n$ sayda üsulla seçmək olar.

M ə s ə l ə 2. Boşqabda 4 alma və 5 armud var. Neçə müxtəlif üsulla bu meyvələrdən ikisini (bir cüt alma və armud) seçmək olar?

H ə l l i. Şərtə görə almanı 4 üsulla, armudu isə 5 üsulla seçmək olar. Həm də şərtə görə bir cüt meyvə (bir alma və bir armud) seçilməsi tələb edilir. Onda hasil qaydasına görə bir cüt meyvəni $5 \cdot 4 = 20$ üsulla seçmək olar.

M ə s ə l ə 3. Təkrarlanmaya yol vermədən 6, 8, 9 rəqəmlərindən neçə ikirəqəmli ədəd düzəltmək olar?

H ə l l i. Aydınır ki, həmin ikirəqəmli ədədlərin onluq mərtəbəsində 6, 8, 9 rəqəmlərindən biri ola bilər. Yəni onluqları göstərən rəqəm üç üsulla seçilə bilər. Odur ki, onluq mərtəbənin rəqəmi seçildikdən sonra təklidlər mərtəbəsinin rəqəmini müəyyən etmək üçün yalnız iki seçim imkanı qalır, çünki rəqəmlər təkrarlanmamalıdır. Deməli, hasil qaydasına görə axtarılan ikirəqəmli ədədlər $3 \cdot 2 = 6$ üsulla seçilə bilər, yəni bu ədədlərin sayı $N=6$ olur.

M ə s ə l ə 4. Regionşünaslıq fakültəsinin birinci kursunda təhsil alan 80 nəfər tələbədən 60 nəfər ingilis dilini, 40 nəfər alman dilini, 30 nəfər isə hər iki dili bilir. Tələbələrin neçə nəfəri nə alman, nə də ingilis dilini bilmir?

H ə l l i. İngilis dilini bilən tələbələr çoxluğunu A , alman dilini bilən tələbələr çoxluğunu isə B ilə işarə edək. O halda yazı bilərik: $n(A)=60$, $n(B)=40$, $n(A \cap B)=30$.

Fəsil 1. Birləşmələr

Buradan isə cəm qaydasından istifadə edərək tapırıq:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 60 + 40 - 30 = 70.$$

Burada $n(A \cup B) = 70$ heç olmasa bir (ya ingilis ya alman) dili bilənlərin sayını göstərdiyindən heç bir dili bilməyənlərin sayı $80 - 70 = 10$ olur.

§ 1.2. Aranjeman

Belə bir misala baxaq. Tutaq ki, 2, 4, 6 rəqəmlərindən müxtəlif birrəqəmli, ikirəqəmli və üçrəqəmli (rəqəmlər müxtəlif olmaq şərtilə) ədədlər düzəltmək lazımdır. Aydındır ki, bu ədədlər aşağıdakılardır:

- | | | |
|------|------------------------------|---------------------|
| I. | 2, 4, 6 | birrəqəmli ədədlər, |
| II. | 24, 26, 46, 42, 62, 64 | ikirəqəmli ədədlər, |
| III. | 246, 264, 426, 462, 624, 642 | üçrəqəmli ədədlər. |

Bu qayda ilə alınmış birləşmələr uyğun olaraq üç elementdən bir-bir elementli (I), üç elementdən iki-iki elementli (II) və üç elementdən üç-üç elementli (III) aranjanlardır.

T ə r i f. Hər birində m sayda olmaqla n sayda elementdən düzəlmiş və bir-birindən ya elementləri, ya da onların sıra müxtəlifliyi ilə fərqlənən birləşmələrə aranjan deyilir ($n \geq m$).

Hər bir qrupa eyni element yalnız bir dəfə daxil olarsa belə aranjanlara təkrarsız aranjanlar deyilir. Məsələn, verilmiş üç a, b, c elementlərindən hər birində iki element olmaqla düzələn təkrarsız aranjanlar bunlardır: ab, bc, ca, cb, ac, ba . Göründüyü kimi bu halda heç bir qrup daxilində təkrarlanan element yoxdur və qruplar həm də elementlərinin qrupda yerləşmə sırasına görə bir-birindən fərqlənirlər: $ab \neq ba, ac \neq ca$ və s.

Fəsil 1. Birləşmələr

Hər birində m sayda olmaqla n sayda elementdən düzələn bütün mümkün aranjemanların sayı A_n^m ilə işarə edilir və bu “aranjeman n elementdən m ” kimi oxunur. Burada A hərfi fransızcadan tərcüməsi “yerləşdirmək” mənasını verən “Arrangement” sözünün baş hərfidir.

Aranjemanların sayının necə hesablanmasını öyrənək. Tutaq ki, n sayda $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ elementləri verilmişdir. Bu elementlərdən əvvəlcə hər birində yalnız bir element ($m=1$) olmaqla aranjemanlar düzəldək. Məlumdur ki, bu halda alınan aranjemanların sayı n olacaq. Yəni $A_n^m = n$.

İndi isə bu elementlərdən iki-iki aranjemanlar düzəldək. Bunun üçün belə bir qaydadan istifadə edək: iki elementli bütün mümkün birləşmələri almaq üçün birinci elementdən başlamaqla, hər bir elementin yanına (sağına) bütün digər ($n-1$ sayda) elementləri bir-bir yazaq. Yəni a_1 elementinin sağına özündən başqa qalan $n-1$ sayda bütün digər elementləri, a_2 -nin sağına özündən başqa bütün digər elementləri və nəhayət, a_n -in sağına yerdə qalan bütün digər elementləri yazsaq aşağıdakı birləşmələri alarıq:

$$n \text{ sayda } \left\{ \begin{array}{l} a_1a_2, \ a_1a_3, \ a_1a_4, \ \dots, \ a_1a_{n-1}, \ a_1a_n \quad (n-1 \text{ sayda birləşmə}) \\ a_2a_1, \ a_2a_3, \ a_2a_4, \ \dots, \ a_2a_{n-1}, \ a_2a_n \quad (n-1 \text{ sayda birləşmə}) \\ a_3a_1, \ a_3a_2, \ a_3a_4, \ \dots, \ a_3a_{n-1}, \ a_3a_n \quad (n-1 \text{ sayda birləşmə}) \\ \dots\dots\dots \\ a_{n-1}a_1, \ a_{n-1}a_2, \ a_{n-1}a_3, \ \dots, \ a_{n-1}a_{n-2}, \ a_{n-1}a_n \quad (n-1 \text{ sayda birləşmə}) \\ a_na_1, \ a_na_2, \ a_na_3, \ \dots, \ a_na_{n-2}, \ a_n \ a_{n-1} \quad (n-1 \text{ sayda birləşmə}) \end{array} \right.$$

Buradan aydındır ki, hər bir sətirdə $n-1$ sayda birləşmə olduğu üçün bütün n sayda sətirlərdəki aranjemanların sayı $n(n-1)$ olacaq. Bu isə o deməkdir ki,

$$A_n^2 = n(n-1).$$

Eyni qayda ilə yuxarıda alınmış iki-iki birləşmələrin hər birinin sağına yerdə qalan $n-2$ sayda elementin hamısını bir-bir yazsaq üç-üç birləşmələri alarıq. Bu birləşmələr isə

Fəsil 1. Birləşmələr

$n(n-1)$ sayda sətir və $n-2$ sayda sütundan ibarət olan cədvəl şəklində əks olunur. Bu isə o deməkdir ki, n elementdən düzəlmiş üç-üç aranjemanların sayı $n(n-1)(n-2)$ sayda olacaq. Yəni $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$.

Analoji qayda ilə prosesi davam etdirsək

$$A_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3),$$

$$A_n^5 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \text{ və s. olar.}$$

Nəhayət, ümumi hal üçün

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots [n-(m-1)]. \quad (1)$$

Bu aranjemanların sayını hesablamaq üçün istifadə olunan düsturdur.

Beləliklə, hər birində m sayda element olmaqla n elementdən düzəlmiş bütün aranjemanların sayı (A_n^m) ən böyüyü n ədədi olan n -dən $n-(m-1)$ -ə qədər m sayda ardıcıl natural ədədin hasilinə bərabərdir.

Məsələn, $A_3^2 = 3(3-1) = 3 \cdot 2 = 6$; $A_4^3 = 4(4-1)(4-2) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$;

$$A_6^4 = 6(6-1)(6-2)(6-3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

M ə s ə l ə 1. Şahmat yarışında 9 nəfər tələbə iştirak edir. Qaydaya görə hər iki tələbə arasında iki oyun keçirilməlidir. Yarışda cəmi neçə oyun keçiriləcək?

H ə l l i. Məsələnin şərtinə görə yarışda hər tələbə digəri ilə iki dəfə görüşəcək. Odur ki, bütün görüşlərin sayı (1) düsturundan istifadə etməklə aşağıdakı kimi tapılır:

$$A_9^2 = 9(9-1) = 9 \cdot 8 = 72.$$

M ə s ə l ə 2. Dörd-dörd təkrarsız aranjemanların sayının iki-iki təkrarsız aranjemanların sayından 20 dəfə çox olması üçün bütün elementlərin sayı neçə olmalıdır?

H ə l l i. Bütün elementlərin sayını x ilə işarə etsək belə bir tənlik alarıq:

Fəsil 1. Birləşmələr

$$A_x^4 = 20 A_x^2.$$

Buradan isə (1) düsturunu tətbiq etdikdə

$$x(x-1)(x-2)(x-3) = 20x(x-1)$$

və ya $x^2 - 5x - 14 = 0$ olur.

Nəhayət, bu kvadrat tənliyi həll edərək $x=7$ olduğunu tapırıq.

M ə s ə l ə 3. Verilmiş 0, 1, 2, 3, 4, 5 rəqəmlərindən neçə müxtəlif üçrəqəmli ədəd düzəltmək olar?

H ə l l i. Məsələnin şərtindən görünür ki, 6 elementdən üç-üç aranjemanların sayını tapmalıyıq. Onda (1) düsturuna görə alırıq:

$$A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Lakin bura sıfırla başlayan üçrəqəmli ədədlər də daxildir. Ona görə də 120-dən sıfırla başlayan üçrəqəmli ədədlərin sayını çıxmaq lazımdır. Belə ədədlərin sayı isə sıfırdan başqa yerdə qalan 5 dənə digər rəqəmlərdən düzələn iki-iki aranjemanların sayı qədərdir.

$$\text{Deməli, } A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20.$$

Beləliklə, axtarılan üçrəqəmli ədədlərin sayı

$$A_6^3 - A_5^2 = 6 \cdot 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 120 - 20 = 100.$$

M i s a l 1. Tənliyi həll et: $A_x^2 = 380$.

H ə l l i. Əvəlcə (1) düsturunu tətbiq edərək alırıq:

$$x(x-1) = 380.$$

Buradan isə $x^2 - x - 380 = 0$ və $x = 20$.

M i s a l 2. Tənliyi həll et: $A_x^3 = 6$.

$$\begin{aligned} \text{H ə l l i. } \quad & x(x-1)(x-2) = 6, \\ & x(x^2 - 3x + 2) - 6 = 0, \\ & x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0, \\ & x^2(x-3) + 2(x-3) = 0, \end{aligned}$$

Fəsil 1. Birləşmələr

$$(x-3)(x^2+2)=0,$$
$$x=3.$$

M i s a l 3. İfadənin qiymətini hesabla:

$$(A_6^2 + A_7^3) : A_4^3$$

H ə l l i.

$$(A_6^2 + A_7^3) : A_4^3 := (6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 \cdot 5) : 4 \cdot 3 \cdot 2 = 10.$$

§ 1.3. Permutasion

T ə r i f. Hər birində n sayda element olmaqla n elementdən düzəlmiş və bir-birindən yalnız elementlərinin sırasına görə fərqlənən aranjemanlara permutasion deyilir.

Permutasionların sayı P_n ilə işarə edilir. Burada P hərfi fransızcadan tərcüməsi “yerdəyişmə” mənasını verən “Permutation” sözünün baş hərfidir.

Tərifə görə alırıq:

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Yəni

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n. \quad (2)$$

Bu düstur n elementdən hər birində n sayda element olmaqla düzələ bilən bütün permutasionların sayını göstərir.

Beləliklə, n sayda elementdən düzələ bilən bütün permutasionların sayı 1-dən n -ə qədər natural ədədlərin hasilinə bərabərdir.

Adətən 1-dən n -ə qədər natural ədədlərin hasili $n!$ şəklində yazılır və belə oxunur: “ n faktorial”. «Factorial» sözünün ingiliscədən tərcüməsi “vuruq” mənasını verir.

Məsələn, $1!=1$, $2!=1 \cdot 2=2$, $3!=1 \cdot 2 \cdot 3=6$, $4!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4=24$,
 $5!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5=120$ və s.

Beləliklə, (2) düsturu həm də

Fəsil 1. Birləşmələr

$$P_n = n! \quad (3)$$

şəklində yazılır.

Bir çox hallarda $0!$ -ın qiymətindən istifadə etmək lazım gəlir. Lakin $0!$ -ın qiymətini yuxarıdakı tərifi görə təyin edə bilmərik, çünki bu mənasız olar. Ona görə də aşağıdakı hesablamaya baxaq.

Aydındır ki, $(n-1)!n=n!$.

Bu bərabərliyin hər iki tərəfini n -ə bölsək alırıq:

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}$$

Buradan isə $n=1$ olduqda $0!=1$ olur.

M i s a l 1. $\frac{n!(n-3)!}{(n-2)!(n-1)!}$ kəsrini ixtisar et.

H ə l l i.

$$\frac{n!(n-3)!}{(n-2)!(n-1)!} = \frac{(n-1)!n(n-3)!}{(n-3)!(n-2)(n-1)!} = \frac{n}{n-2}.$$

M i s a l 2. $A_5^3 + P_3$ ifadəsinin qiymətini hesabla.

H ə l l i. $A_5^3 + P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 + 3! =$
 $= 60 + 1 \cdot 2 \cdot 3 = 60 + 6 = 66.$

M i s a l 3. $\frac{A_7^2 + A_5^3}{P_3}$ ifadəsinin qiymətini hesabla.

H ə l l i. $\frac{A_7^2 + A_5^3}{P_3} = \frac{7 \cdot 6 + 5 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = \frac{7 \cdot 6 + 5 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} =$
 $= 7 + 5 = 12.$

M i s a l 4. Tənliyi həll et: $A_n^4 P_{n-4} = 42 P_{n-2}$

H ə l l i. (1) və (3) düsturlarından istifadə edərək alırıq: $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)! = 42(n-2)!$

Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki faktorialı çevirək:

$$(n-4)! n(n-1)(n-2)(n-3) = 42(n-4)!(n-3)(n-2).$$

Fəsil 1. Birləşmələr

Nəhayət, ixtisarlardan sonra aşağıdakı kvadrat tənlik alınır: $n^2-n-42=0$.

Buradan isə $n=7$ olur.

M ə s ə l ə 1. $E=\{2,7,8\}$ çoxluğunun elementlərindən müxtəlif üçrəqəmli ədədlər düzəlt və onların sayını tap.

H ə l l i. Verilən çoxluğun elementlərindən aşağıdakı üçrəqəmli ədədləri (permutasionları) düzəltmək olar:

278, 287, 728, 782, 827, 872.

Bu ədədlərin sayını (3) düsturundan istifadə edərək tapırıq:

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

M ə s ə l ə 2. Bir stolun ətrafında 6 nəfəri neçə müxtəlif qayda ilə əyləşdirmək olar?

H ə l l i. Qaydaların sayı (3) düsturu ilə tapılır:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

M ə s ə l ə 3. Verilmiş 19058 ədədində rəqəmlərin yerini dəyişməklə neçə beşrəqəmli ədəd düzəltmək olar?

H ə l l i. Şərtdən aydındır ki, hər birində 5 element olmaqla 5 elementdən düzələn permutasionların sayını tapmaq tələb olunur. Deməli, (3) dusturuna görə alırıq:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Lakin bura həm də sıfırla başlayan beşrəqəmli ədədlər daxildir. Yəni 120-dən sıfırla başlayan beşrəqəmli ədədlərin sayı çıxılmalıdır. Belə ədədlərin sayı isə sıfırdan başqa yerdə qalan 4 dənə digər rəqəmlərdən düzəlmiş dörd-dörd permutasionların sayına bərabərdir.

Deməli, $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$.

Beləliklə, axtarılan beşrəqəmli ədədlərin sayı

$$P_5 - P_4 = 120 - 24 = 96.$$

Fəsil 1. Birləşmələr

§ 1.4. Aranjanlar sayı düsturunun başqa şəkli

Məlumdur ki, aranjanların sayı (1) düsturu ilə tapılır. Yəni

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots [n-(m-1)].$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfini $1\cdot 2\cdot 3\dots(n-m)$ hasilinə vuraq və bölək:

$$A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\dots(n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(n-m)}$$

Buradan isə surətdəki vuruqları artma ardıcılığı ilə düzsək alarıq:

$$A_n^m = \frac{1\cdot 2\cdot 3\dots(n-m)(n-m+1)\dots(n-2)(n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3\dots(n-m)} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Beləliklə,

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (4)$$

M i s a l 1. $\frac{P_{n-m} \cdot A_n^m}{P_{n+1}}$ ifadəsinin qiymətini hesabla.

$$\begin{aligned} \text{H ə l l i. } \frac{P_{n-m} \cdot A_n^m}{P_{n+1}} &= \frac{(n-m)! \cdot \frac{n!}{(n-m)!}}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \\ &= \frac{n!}{n!(n+1)} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

M i s a l 2. $\frac{P_{k-n} \cdot A_{k-1}^{n-1}}{P_{k+1}}$, ($k \geq n$) ifadəsinin qiymətini

hesabla.

Fəsil 1. Birləşmələr

H ə l l i.

$$\begin{aligned}\frac{P_{k-n} \cdot A_{k-1}^{n-1}}{P_{k+1}} &= \frac{(k-n)! \frac{(k-1)!}{(k-1-n+1)!}}{(k+1)!} = \frac{(k-n)! \frac{(k-1)!}{(k-n)!}}{(k+1)!} = \\ &= \frac{(k-1)!}{(k+1)!} = \frac{(k-1)!}{(k-1)!k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}.\end{aligned}$$

M i s a l 3. $\frac{P_{n-k} \cdot A_n^k}{P_{n-1}}$, $k \leq n$ ifadəsinin qiymətini hesabla.

$$\begin{aligned}\text{H ə l l i.} \quad \frac{P_{n-k} \cdot A_n^k}{P_{n-1}} &= \frac{(n-k)! \frac{n!}{(n-k)!}}{(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \\ &= \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} = n.\end{aligned}$$

M i s a l 4. n -in qiymətini tap ($n > k$):

$$(n+5)! = 240 P_{n-k} A_{n+3}^{k+3}.$$

H ə l l i. Bərabərliyin sağ tərəfinə (3) və (4) düsturlarını tətbiq edək:

$$(n+5)! = 240 (n-k)! \frac{(n+3)!}{(n+3-k-3)!} \quad \text{və ya}$$

$$(n+5)! = 240 (n-k)! \frac{(n+3)!}{(n-k)!}.$$

İxtisardan sonra isə $(n+5)! = 240 (n+3)!$ olur.

Buradan da $(n+3)!(n+4)(n+5) = 240 (n+3)!$

$$n^2 + 9n - 220 = 0$$

$$n = 11.$$

§ 1.5. Kombinezon

T ə r i f. Hər birində m sayda element olmaqla n elementdən ($n \geq m$) düzəlmiş və bir-birindən heç olmazsa bir elementi ilə fərqlənən aranjemanlara kombinezon deyilir.

Hər birində m element olmaqla n elementdən düzəlmiş kombinezonların sayı C_n^m ilə işarə edilir və belə oxunur: “kombinezon n elementdən m ”. Burada C hərfi, fransızcadan tərcüməsi “kombinasiya” mənasını verən “Combination” sözünün baş hərfidir.

Kombinezonun tərifindən görünür ki, hər birində m element olmaqla n elementdən düzəlmiş kombinezonlar bir-birindən ən azı bir elementi ilə fərqlənirlər.

Məsələn, a, b, c, d kimi dörd elementdən üç-üç düzələ bilən kombinezonlar bunlardır:

$$\underbrace{abc, abd, acd, bcd,}_{4 \text{ birləşmə}}$$

Göründüyü kimi bu birləşmələrin -kombinezonların hər biri digərindən ən azı bir elementi ilə fərqlənir və bunların sayı dördə bərabərdir. Beləliklə, aydın olur ki, dörd elementdən hər birində üç element olmaqla yalnız dörd kombinezon düzəltmək olar. Yəni $C_4^3=4$.

Alınan bu kombinezonların hər birində üç element var. Bu kombinezonlardakı elementlərin yerini dəyişsək həmin elementlərdən düzələn permutasionları alarıq. Onda hər kombinezondakı elementlərdən üç-üç düzələ bilən permutasionların sayı $P_3=6$ olar. Deməli, bütün kombinezonlardan düzələn birləşmələrin sayı $A_4^3=24$ olar.

Fəsil 1. Birləşmələr

Doğrudan da hər kombinezonda elementlərin yerini dəyişməklə alınan birləşmələri yazsaq alırıq:

$$6 \text{ birləşmə} \left\{ \begin{array}{cccc} abc & abd & acd & bcd \\ acb & adb & adc & bdc \\ bac & dba & cad & cdb \\ bca & dab & cda & cbd \\ cab & bad & dac & dbc \\ cba & bda & dca & dcba \end{array} \right.$$

Beləliklə, ümumilikdə $4 \cdot 6 = 24$ sayda aranjeman alırıq. Lakin bu sayda permutasionlar və kombinezonlar da daxildir. Yəni dörd elementdən üç-üç düzəlmiş kombinezonların sayı 4, aranjemanların sayı 24, permutasionların sayı isə 6 olur. Alırıq ki, aranjemanlar kombinezonlarla permutasionların sayları hasilinə bərabər olur. Deməli, bu ədədlər arasında

$$4 \cdot 6 = 24 \quad \text{və ya} \quad C_4^3 \cdot P_3 = A_4^3$$

bərabərliyini yazmaq olar. Bu münasibəti ümumi hal üçün də yazmaq olar. Yəni göstərmək olar ki, hər birində m element olmaqla n sayda elementdən düzələn kombinezonların sayı üçün $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$ düsturu doğrudur. Buradan kombinezonu təyin edə bilərik:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots [n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}, \quad (n \geq m). \quad (5)$$

Bu münasibət kombinezonların sayını göstərən düsturdur.

Məsələn,

$$C_5^2 = \frac{A_5^2}{P_2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10.$$

$$C_7^3 = \frac{A_7^3}{P_3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35 \quad \text{və s.}$$

Fəsil 1. Birləşmələr

Kombinezonların sayını göstərən $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$ düsturunu başqa şəkildə də yazmaq olar. Bunun üçün surət və məxrəcdə A_n^m və P_m –in müvafiq olaraq (4) və (3) düsturları ilə verilmiş qiymətlərini nəzərə alaq:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Deməli,

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}. \quad (6)$$

Bu düsturu (5) düsturunun sağ tərəfindən istifadə etməklə də çıxarmaq olar. Doğrudan da (5) düsturunun sağ tərəfinə diqqət yetirdikdə aydın olur ki, surəti əlavə vuruqlar daxil etməklə $n!$ -a çatdırmaq olar. Bunun üçün surət və məxrəci $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m)$ hasilinə vuraq.

$$\begin{aligned} C_n^m &= \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(m-1)] \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m)}. \end{aligned}$$

İndi isə surətdəki vuruqların yerini dəyişərək onları artma ardıcılığı ilə yazaq:

$$\begin{aligned} C_n^m &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m) \cdot [n-(m-1)] \dots (n-2)(n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m)} = \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{P_n}{P_m \cdot P_{n-m}} \end{aligned}$$

və ya

$$C_n^m = \frac{P_n}{P_m \cdot P_{n-m}}. \quad (7)$$

Fəsil 1. Birləşmələr

Kombinezonun xassələri.

Kombinezonun bir sıra maraqlı və mühüm xassələri var. Bu xassələrdən ikisinə baxaq.

Birinci xassə.

$$C_n^m = C_n^{n-m}. \quad (8)$$

Doğrudan da yuxarıdakı (7) düsturunda m ədədinin yerinə $n-m$ yazsaq alarıq:

$$C_n^{n-m} = \frac{P_n}{P_{n-m} \cdot P_m}. \quad (9)$$

(7) və (8) düsturlarının sağ tərəflərinin bərabərliyindən

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Və ya (6) düsturundan istifadə edərək C_n^{n-m} -i hesablasaq, alarıq:

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{[n-(n-m)]!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m.$$

Bu xassədən istifadə edərək $m > \frac{n}{2}$ olan hallarda C_n^m -in hesablanmasını sadələşdirmək olar. Məsələn:

$$C_{15}^{12} = C_{15}^3 = \frac{15!}{(15-3)!3!} = \frac{15!}{12!3!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 3} = 455.$$

$$C_{12}^{10} = C_{12}^2 = \frac{12!}{2!(12-2)!} = \frac{12!}{2!10!} = \frac{11 \cdot 12}{2!} = 66 \quad \text{və s.}$$

İkinci xassə.

$$C_{n+1}^{m+1} = C_n^{m+1} + C_n^m, \quad (m < n). \quad (10)$$

Doğrudan da, (6) düsturunu bu bərabərliyin sağ tərəfinə tətbiq edək:

$$C_n^{m+1} + C_n^m = \frac{n!}{(n-m-1)!(m+1)!} + \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Alınmış bərabərliyin sağ tərəfindəki kəsrlərdən

Fəsil 1. Birləşmələr

birincinin surət və məxrəcini $(n-m)$ -ə, ikincinin surət və məxrəcini isə $(m+1)$ -ə vurub bölərək hesablamayı davam etdirsək alırıq:

$$\begin{aligned} C_n^{m+1} + C_n^m &= \frac{n!(n-m)}{(n-m-1)!(n-m)(m+1)!} + \frac{n!(m+1)}{(n-m)!m!(m+1)} = \\ &= \frac{n!(n-m)}{(n-m)!(m+1)!} + \frac{n!(m+1)}{(n-m)!(m+1)!} = \frac{n!(n-m) + n!(m+1)}{(n-m)!(m+1)!} = \\ &= \frac{n!(n-m+m+1)}{(n-m)!(m+1)!} = \frac{n!(n+1)}{[n+1-(m+1)]!(m+1)!} = C_{n+1}^{m+1}. \quad (11) \end{aligned}$$

Alınmış (11) düsturunda m və n -i uyğun olaraq $m-1$ və $n-1$ ilə əvəz etsək həmin düstur aşağıdakı şəkllə düşər:

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m, \quad (m < n). \quad (12)$$

Birləşmələr sayının hesablanmasına aid misallar.

- 1) $C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3!} = 56.$
- 2) $C_{54}^{52} = C_{54}^2 = \frac{54!}{2!52!} = \frac{53 \cdot 54}{2!} = 53 \cdot 27 = 1431.$
- 3) $C_{26}^{25} - P_4 = C_{26}^1 - 4! = \frac{26!}{25!1!} - 24 = 26 - 24 = 1.$
- 4) $C_{14}^{13} + A_3^2 = C_{14}^1 + A_3^2 = \frac{14!}{13!1!} + 3 \cdot 2 = 14 + 6 = 20.$
- 5) $\frac{C_{19}^{17} + C_{19}^{18}}{C_{20}^{17}} = \frac{C_{19}^2 + C_{19}^1}{C_{20}^3} = \frac{\frac{19!}{17!2!} + \frac{19!}{18!1!}}{\frac{20!}{17!3!}} =$

Fəsil 1. Birləşmələr

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{18 \cdot 19}{2} + 19}{\frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{6}} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 6 + 2 \cdot 19 \cdot 6}{2 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20} = \\ &= \frac{18 \cdot 6 + 2 \cdot 6}{2 \cdot 18 \cdot 20} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad \frac{A_{10}^6 + P_{10}}{C_9^6 \cdot 7!} &= \frac{A_{10}^6 + P_{10}}{C_9^3 \cdot 7!} = \frac{\frac{10!}{4!} + 10!}{\frac{9!}{6! \cdot 3!} \cdot 7!} = \\ &= \frac{10!(1 + 4!) \cdot 6! \cdot 3!}{9! \cdot 4! \cdot 7!} = \frac{10(1 + 4!)}{4 \cdot 7} = \frac{10 + 24 \cdot 10}{28} = \frac{250}{28} = \\ &= \frac{125}{14} = 8 \frac{13}{14}. \end{aligned}$$

Tənlik və bərabərsizliklərin həlli.

$$\begin{aligned} 1) \quad C_x^2 = 3 &\Rightarrow \frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} = 3 \Rightarrow \frac{(x-2)! \cdot (x-1)x}{(x-2)! \cdot 2!} = 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{(x-1)x}{2!} = 3 \Rightarrow (x-1)(x-2)! = 6 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 5 C_x^3 &= C_{x+2}^4 \Rightarrow 5 \frac{A_x^3}{P_3} = \frac{A_{x+2}^4}{P_4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} = \frac{(x+2)(x+1)x(x-1)}{4!} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{5(x-2)}{3!} = \frac{(x+2)(x+1)}{4!} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3!(x^2 + 3x + 2) = 5 \cdot 4!(x-2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 17x + 42 = 0 \Rightarrow x_1 = 14, x_2 = 3. \end{aligned}$$

Fəsil 1. Birləşmələr

- 3) $A_{x+2}^5 = P_5 \cdot C_{x+1}^4 \Rightarrow \frac{(x+2)!}{(x-3)!} = 5! \cdot \frac{(x+1)!}{(x-3)!4!} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x+2)! = 5(x+1)! \Rightarrow (x+1)!(x+2) = 5(x+1)! \Rightarrow$
 $\Rightarrow x+2=5 \Rightarrow x=3.$
- 4) $A_x^3 + C_x^{x-2} < 14x \Rightarrow x(x-1)(x-2) + C_x^2 < 14x \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2x(x-1)(x-2) + x(x-1) < 14x \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2x^2 - 5x - 25 < 0 \Rightarrow 2 < x < 5.$
- 5) $\frac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336 \Rightarrow A_x^5 < 336 C_{x-2}^{x-5} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{x!}{(x-5)!} < 336 \frac{(x-2)!}{3!(x-5)!} \Rightarrow x(x-1) < 56 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2 - x - 56 < 0 \Rightarrow 5 < x < 8.$
- 6) $A_{x-1}^2 - C_x^1 < 79 \Rightarrow x(x-1) - \frac{x!}{(x-1)!} < 79 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x-1)(x-2) - x < 79 \Rightarrow x^2 - 4x - 77 < 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 1 < x < 11.$

Məsələlər

1) On rəng verilərsə, yalnız bu rənglər vasitəsilə üç üfüqi zolaqdan ibarət olan neçə müxtəlif zolaqlı bayraq şəkli çəkmək olar?

H ə l l i: Cəmişi $n=10$ rəng verildiyindən və hər bir bayraqdakı zolaqların sayı $m=3$ olduğundan bayraqların sayı

$$A_n^m = A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720 \text{ olur.} \quad \text{Cavab: } 720!$$

2) Teatrın kassasına 8 nəfər neçə müxtəlif üsulla növbədə dayana bilər?

H ə l l i. Məsələnin şərtinə görə növbədə 8 nəfər dayanmalıdır. Onda birinci yerdə 8 nəfərdən istənilən biri dayana bilər, yəni birinci yer 8 üsulla tutula bilər. Bir nəfər birinci yerdə dayandıqdan sonra 7 nəfər üçün 7 yer qalır,

Fəsil 1. Birləşmələr

yəni ikinci yer 7 üsulla tutula bilər. Analoji qayda ilə üçüncü, dördüncü və s. yerlər də tutulur. Odur ki, hasil qaydasından istifadə edərək alırıq: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Bu yazılış isə yuxarıda göstəriləyi kimi $8!$ deməkdir və permutasion adlanır: $P_8=8!$

Cavab: 8!

3) Verilmiş 1, 2, 3, 4, 5 rəqəmlərindən hər biri ən azı üç rəqəmdən ibarət olan və tərkibində hər bir rəqəm yalnız bir dəfə iştirak edən neçə ədəd düzəltmək olar?

H ə l l i. Deməli, verilən rəqəmlərdən düzəlməklə bütün üçrəqəmli, dörd rəqəmli və beş rəqəmli ədədlərin sayını tapmaq lazımdır.

Üçrəqəmli ədədlərin sayı – $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$, dörd rəqəmli ədədlərin sayı – $A_5^4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ və nəhayət, beş rəqəmli ədədlərin sayı – $A_5^5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ olur. Onda cəm qaydasından istifadə edərək alırıq:

$$A_5^3 + A_5^4 + A_5^5 = 60 + 120 + 120 = 300.$$

Cavab: 300.

4) Hər birində altı nəfər olmaqla səkkiz nəfərdən neçə müxtəlif variantda voleybol komandası yaratmaq olar?

H ə l l i. Bu məsələnin həlli üçün kombinezon düsturundan istifadə edirik. Çünki burada elementlərin yerləşmə ardıcılığı nəzərə alınmır. Onda alırıq:

$$C_8^6 = \frac{8!}{(8-6)! \times 6!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28.$$

Cavab: 28.

5) **123456** rəqəmlərindən neçə dörd rəqəmli ədəd düzəltmək olar? Bu ədədlərdən neçəsinin tərkibində 5 rəqəmi yoxdur?

H ə l l i. Verilmiş rəqəmlərin sayı 6-dır. Deməli, altı rəqəmdən istifadə edərək dörd rəqəmli ədədlər düzəldilir və

Fəsil 1. Birləşmələr

yeni yaranan ədədlərin tərkibində rəqəmlərin yerləşmə ardıcılığının əhəmiyyəti var. Odur ki, aranjeman düsturundan istifadə edərək dörd rəqəmli ədədlərin sayını tapırıq:

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

Lakin bu ədədlər arasında 5 rəqəmi iştirak edən ədədlər də var. Həmin ədədləri aradan çıxarmaq üçün baxılan rəqəmlər arasından 5 rəqəmini ataq. Onda bu rəqəm iştirak etməyən ədədlərin sayı aşağıdakı kimi olar:

$$A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 120.$$

Cavab: 360 və 120.

I fəslə aid çalışmalar

1. Hesablayın

- 1) A_6^2 ; 2) A_7^4 ; 3) C_{11}^4 ; 4) C_{20}^{18} ; 5) C_{36}^{35} ; 7) P_8 ;
- 8) $(P_9 - P_6):9P_6$; 9) $(P_7 - P_5):20P_3$; 10) $C_{14}^{13} + A_3^2$;
- 11) $\frac{20!}{5! \cdot 16!}$; 12) $C_{26}^{25} - P_4$; 13) $\frac{P_6(C_7^5 + C_7^4)}{A_{10}^7}$;
- 14) $A_8^5 \cdot \frac{P_6 - P_5}{5!}$; 15) $\frac{A_5^3 + A_7^2}{P_3}$; 16) $\frac{A_n^k \cdot (n-k)!}{(n-1)!}$ ($k < n$);
- 17) $\frac{A_{10}^n \cdot P_{10-n}}{10 \cdot P_{10}} \cdot C_{20}^{18}$; 18) $\frac{A_m^3 + A_m^4}{A_m^2}$; 19) $\frac{A_{20}^6 + A_{20}^5}{A_{20}^4}$;

Fəsil 1. Birləşmələr

$$20) \frac{P_{k+1}}{A_{k-1}^{n-1} \cdot P_{k-n}}, \quad k > n; \quad 21) \frac{A_{m-1}^{n-1} \cdot P_{m-n}}{10 \cdot P_{n-1}};$$

2. Tənlikləri həll edin

$$\begin{aligned} 1) A_x^2 &= 42; & 2) A_x^3 &= 6; & 3) A_x^3 &= 56; & 4) A_x^4 &= 12 \cdot A_x^2; \\ 5) C_{x-3}^2 &= 21; & 6) A_{x+3}^2 + C_{x+2}^2 &= 126; & 7) 5C_x^3 &= C_{x+2}^4; \\ 8) C_x^3 + C_x^4 &= 11C_{x+1}^2; & 9) 11C_x^3 &= 24C_{x+1}^2; & 10) \frac{C_{2x}^{x+1}}{C_{2x+1}^{x-1}} &= \frac{2}{3}; \\ 11) 2C_{x+3}^{x-1} &= 55A_{x+1}^2; & 12) A_4^2 C_{x+1}^3 &= x(x+1)C_{x-1}^{x-4}; \\ 13) (x+5)! &= 240(x-k)!A_{x+3}^{k+3}; & 14) C_{x+1}^{x-4} &= \frac{7}{15}A_{x+1}^3; \\ 15) C_{x+4}^{x+1} - C_{x+3}^x &= 15(x+2); & 16) C_x^3 + C_x^2 &= 15(x-1). \end{aligned}$$

3. Bərabərsizlikləri həll edin

$$\begin{aligned} 1) C_{x+1}^{x-1} &< 21, \quad x \in N; & 2) C_{x+1}^{x-1} &> \frac{3}{2}, \quad x \in N; \\ 3) C_{x-1}^4 - C_{x-1}^3 - \frac{5}{4}A_{x-2}^2 &< 0, \quad x \in N; & 4) 2C_n^5 &> 11C_{n-2}^3, \quad n \in N; \\ 5) \frac{A_{n+1}^4}{C_{n-1}^{n-3}} &> 14P_3; & 6) \frac{A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}} &> \frac{24}{23}, \quad x \in N. \\ 7) 35P_{x+2} \cdot C_{x+1}^2 &> 24A_{x+2}^{x-1}, \quad x \in N; & 8) C_n^6 &< C_n^4, \quad n \in N. \\ 9) \frac{A_x^5}{C_{x-1}^{x-5}} &< 336, \quad x \in N; & 10) 5C_n^3 &< C_{n+2}^4, \quad n \in N. \end{aligned}$$

4. Neçə üsulla 7 nəfərdən 3 nəfərlik komissiyalar yaratmaq olar? (c. 35).

5. Rəqəmləri təkrarlamadan 1, 2, 3, 4 rəqəmlərindən neçə müxtəlif ikirəqəmli ədəd yazmaq olar? (c. 12).

Fəsil 1. Birləşmələr

6. Rəqəmləri təkrarlamadan 0, 1, 2, 3 rəqəmlərindən düzələn bütün mümkün dörd rəqəmli ədədlərin sayını tapın. (c.18).
7. Rəqəmləri təkrarlamadan 1, 2, 3, 4, 5 rəqəmlərindən düzəlmiş bütün mümkün beş rəqəmli ədədlərin neçəsi 3 rəqəmi ilə başlayır? (c.24).
8. Futbol turnirində 153 oyun keçirilmiş və bu yarışlarda istənilən iki komanda arasında yalnız bir görüş olmuşdur. Yarışlarda neçə komanda iştirak etmişdir? (c.18).
9. Çevrə üzərində olan beş nöqtədən, səkkiz nöqtədən, on nöqtədən neçə müxtəlif vətər çəkmək olar? (c.10, 28, 45).
10. Düzgün beşbucaqlının, düzgün səkkizbucaqlının, düzgün onbucaqlının neçə diaqonalı var? (c.5, 20, 35).

Göstəriş: Əvvəlki məsələnin nəticəsindən istifadə etmək lazımdır. Belə ki, çevrə üzərindəki həmin nöqtələri birləşdirən düz xətt parçalarının heç də hamısı diaqonal olmur.

11. Universitetlərarası güləş yarışlarında iştirak etmək üçün 4 nəfər idmançı seçilməlidir. Əgər güləşçilər 6 nəfərdirsə neçə variantda seçim etmək olar? (c. 15).
12. Yeni il şənliyində 6 dost görüşdü və onların hər biri digərinin əlini sıxdı. Neçə əl sıxma oldu? (c.15).
13. Şahmat turnirində 16 nəfər iştirak edir. İstənilən iki nəfər arasında yalnız bir görüş nəzərdə tutulursa turnirdə cəmi neçə partiya oynanılmalıdır. (c. 120).
14. Konfransda iştirak edən xarici qonaqlara tərcüməçiliklə bağlı köməklik göstərən tələbələrdən 15 nəfər ingilis dilini və 8 nəfər isə alman dilini bilir. Tələbələrin 5 nəfəri həm ingilis, həm də alman dilini bilir. Tələbələrin sayını tapın.(c.18).
15. Soldan sağa və sağdan sola eyni oxunan neçə beş rəqəmli ədəd var? (c.900). *Göstəriş: Belə ədədlər polindrom ədədlər adlanır və ümumi şəkildə $abcba$ kimi yazıla bilər. Burada b və c istənilən rəqəm ola bilər (yəni 0-dan 9-a qədər qiymətlər*

Fəsil 1. Birləşmələr

ala bilər), a isə sıfırdan fərqlidir (yəni 1-dən 9-a qədər qiymətlər ala bilər). Odur ki, hasil qaydasından istifadə etmək olar.

16. Neçə ikirəqəmli ədəd var? (c.90).

17. Tələbə ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika fənnindən fərdi iş yazmalıdır. Bunun üçün ona 6 mövzu ehtimal nəzəriyyəsindən və 4 mövzu isə riyazi statistikadan təqdim olundu. Tələbə fərdi iş üçün bir mövzunu neçə üsulla seçə bilər?

18. Rəqəmləri təkrarlamadan 2, 4, 6, 8 rəqəmlərindən neçə üçrəqəmli ədəd düzəltmək olar? (c.24).

19. Tikinti firmasının rəhbərliyi 5 nəfərdən ibarətdir. Bu tərkibdən direktor və direktor müavini seçilməlidir. Seçməni neçə üsulla aparmaq olar? (c.20).

20. Güldanda 10 qırmızı və 4 sarı rəngli qərənfil gülü var. Bu güllər arasından bir qırmızı və iki sarı gül seçmək lazımdır. Seçmə neçə üsulla aparıla bilər? (c.60).

21. Səbətdə 9 sarı və 7 yaşıl limon var. Bu səbətdən neçə üsulla eyni rəngli (ya yaşıl ya da sarı) iki limon götürmək olar?

Həlli. Tutaq ki, birinci halda $n=9$ sarı limondan $m=2$ dənəsini seçmək lazımdır. Bunu isə $C_9^2=36$ üsulla etmək olar. Eyni qayda ilə ikinci halda səbətdəki $n=7$ yaşıl limondan $m=2$ dənəsini $C_7^2=21$ üsulla seçmək olar. Bundan sonra ümumi üsulların sayını cəm qaydası ilə tapa bilərik: $N=36+21=57$.

22. Torbada 5 qırmızı və 6 göy kürəcik var. Torbadan neçə üsulla 2 qırmızı və 2 göy kürəcik çıxarmaq olar?

Həlli. Torbadakı 5 qırmızı kürəciyin ikisini $C_5^2=10$ müxtəlif üsulla çıxarmaq olar. Eyni ilə torbadakı 6 göy kürəcikdən ikisi $C_6^2=15$ müxtəlif üsulla çıxarıla bilər.

Fəsil 1. Birləşmələr

Torbadan qırmızı kürəciyin çıxarılması hadisəsi ilə göy kürəciyin çıxarılması hadisələri asılı hadisələr olmadığından hasil qaydasına görə $N=15 \cdot 10=150$ olur.

23. İbtidai sinif müəllimliyi ixtisası üzrə 35 nəfər tələbə təhsil alır. Bunlardan 20 nəfər boş vaxtlarında idmanla və 11 nəfər milli rəqlə məşğul olur, 10 nəfər isə heç nə ilə məşğul olmur. Həm idmanla, həm də milli rəqlə neçə nəfər məşğul olur? (c. 6).

24. Təkrarlanmaya yol vermədən 6, 7, 8, 9 rəqəmlərindən neçə müxtəlif dörd rəqəmli ədəd yazmaq olar. (c. 24).

25. Qrupdakı $n=20$ nəfər tələbədən $m=2$ nəfəri əlaçıdır. Həmin iki nəfəri də daxil etməklə qrup tələbələrindən 4 nəfər konfransa nümayəndə seçilməlidir. Bu 4 nəfəri neçə müxtəlif üsulla seçmək olar? (c.153). *Göstəriş: Şərtə görə seçilən 4 nəfərin ikisi həmin əlaçı tələbələr olmalıdır. Bu şərt olmasaydı 20 nəfərdən 4 nəfəri $C_n^m = C_{20}^4$ sayda müxtəlif üsulla seçmək olardı. Lakin əlavə şərtin tələbinə uyğun olaraq n və m -in qiymətini 2 vahid azaltmaq lazımdır.*

Fəsil 2. Ehtimal nəzəriyyəsinin elementləri

Ehtimal nəzəriyyəsi təsadüfi hadisələrin qanunauyğunluqlarını öyrənən riyazi elmdir. Bu elm sahəsinin meydana gəlməsi XVII əsrin ortalarına təsadüf edir və Hüygens, Paskal, Ferma və Yakov Bernullinin adı ilə bağlıdır. Belə ki, həmin dövrdə onlar böyük coşqu və ehtirasla keçən oyunların araşdırılmasına həsr olunmuş tədqiqat işləri ilə ilk dəfə olaraq bu nəzəriyyənin əsasını qoymuşlar. O cümlədən, Hüygens, Paskal və Ferma tərəfindən kütləvi hadisələr nəzəriyyəsi ilə bağlı ilk dəfə olaraq aparılmış araşdırmalar nəticəsində ehtimal nəzəriyyəsinin mühüm anlayışları olan hadisələrin baş verməsi ehtimalı və riyazi gözləmə anlayışları yaradılmış, həmçinin bu anlayışların əsas xassələri, eləcə də onların hesablanma qaydaları müəyyən edilmişdir.

Bir sıra digər elm sahələri kimi ehtimal nəzəriyyəsi də insan həyatının praktiki tələbləri ilə əlaqədar olaraq meydana gəlmiş və XVIII əsrdən bir elm sahəsi kimi inkişaf etməyə başlamışdır. Ehtimal nəzəriyyəsinin bir riyazi elm sahəsi kimi təşəkkül tapmasında J. Bernulli, A. Muavr, P. Laplas, K. Qauss və S. Puasson kimi alimlər böyük rol oynamışlar. Eyni zamanda ehtimal nəzəriyyəsinin inkişafında rus alimləri P. L. Çebışev, A. A. Markov, A. M. Lyapunov və A.N.Kolmoqorovun görkəmli xidmətləri olmuşdur.

§2.1. Hadisələr və onların növləri.

Yəqin (mümkün) hadisə, mümkün olmayan hadisə, təsadüfi hadisə. Adətən insanlar həyatda və eləcə də təbiətdə baş verən müxtəlif hadisələrlə qarşılaşırlar. Məsələn, avtomobil qəzası, abituriyentin 700 bal toplaması, dolu düşməsi, günəşin batması, ağacların çiçək açması, torpaq sürüşməsi, vulkan püskürməsi, çayların daşaraq öz məcrasından çıxması və s. belə hadisələrdəndir.

Ümumiyyətlə, hadisələr üç qrupa bölünür: **mümkün (yəqin) hadisə, mümkün olmayan (qeyri-mümkün) hadisə və təsadüfi hadisə.**

Bəzən hər hansı bir hadisənin baş verməsi üçün müəyyən cəhdlər edilir və ya təcrübələr aparılır. Bu zaman edilən hər bir cəhd və ya aparılan hər bir təcrübə **sınaq** adlanır, yəni gözlənilən hadisənin baş verməsi üçün keçirilən sınaq.

Əgər aparılan sınaq nəticəsində gözlənilən hadisə hökmən baş verərsə, belə hadisə **mümkün (yəqin) hadisə** adlanır. Məsələn, tutaq ki, hər hansı kisədə 20 dənə qırmızı rəngli kürəcik var. Həmin kisədən bir dənə kürəcik götürsək, bu hökmən qırmızı rəngli kürəcik olacaq. Çünki kisədə yalnız qırmızı rəngli kürəciklər var. Deməli, kisədən qırmızı rəngli kürəciyin çıxması hadisəsi **mümkün (yəqin) hadisədir.**

Əgər aparılan sınaq nəticəsində gözlənilən hadisənin baş verməsi mümkün deyilsə, o halda həmin hadisəyə **mümkün olmayan hadisə** deyilir. Yəni belə hadisə heç bir sınaq nəticəsində baş vermir. Məsələn, yuxarıda göstərilən kisədə yalnız qırmızı kürəciklər var. Odur ki, həmin kisədən istənilən kürəciyi götürsək onun göy rəngli olması hadisəsi **mümkün olmayan (qeyri-mümkün) hadisədir.**

Eyni zamanda aparılan sınaq nəticəsində hadisə ola bilər ki, baş versin və ya ola bilər ki, baş verməsin. Yəni sınaq nəticəsində gözlənilən hadisə baş verə də bilər, baş verməyə də bilər. Belə hadisə **təsadüfi hadisədir**. Məsələn, “Neftçi” futbol komandasının ölkə kuboku üzrə final oyununda “Xəzər” komandasına qalib gəlməsi, Kür çayının daşaraq sahiləni əraziləri basması, Səidin qəbul imtahanlarından 700 bal toplaması və s. təsadüfi hadisələrdir.

Başqa bir misal, bir oyun zamanı atdıqda zərər yuxarı düşən üzündə 1, 2, 3, 4, 5, 6 xallarından hər hansı birinin olması yəqin hadisə, yuxarı düşən üzündə 8 xalının olması mümkün olmayan hadisə və nəhayət, yuxarı düşən üzündəki xalın cüt ədədlə ifadə olunması təsadüfi hadisədir.

Bu və ya digər hadisə və prosesləri öyrənərkən biz bəzən onların məzmunu və mahiyyəti ilə yox, yalnız onların baş verib-verməməsi ilə maraqlanırıq. Eyni zamanda indiyə qədər müxtəlif fənləri, o cümlədən, riyaziyyatı, fizikanı, kimyanı öyrənərkən hər bir hadisənin nəticəsini əvvəlcədən dəqiq göstərməyə imkan verən bir sıra ilkin qanunauyğunluqlarla tanış olmuşuq. Məsələn:

- əgər üç düz xətt parçasının uzunluqları məlumdursa, onda biz əvvəlcədən deyə bilərik ki, bu düz xətt parçalarından üçbucaq qurmaq olar, yoxsa, yox?
- əgər hər hansı əşyanın xüsusi çəkisi məlum olarsa, onda onu suya atmazdan əvvəl deyə bilərik ki, həmin əşya suda batır, ya yox?
- əgər raketin sürəti məlum olarsa, onda əvvəlcədən söyləmək olar ki, o, yerin cazibə sahəsindən çıxma biləcək yoxsa, yox və s.?

Bununla yanaşı çox zaman elə hadisələrlə qarşılaşırıq ki, onların baş verib-verməməsi haqqında əvvəlcədən müəyyən fikir söyləmək mümkün olmur. Belə hadisələr

yuxarıda deyildiyi kimi təsadüfi hadisələr adlanır. Məsələn, oyun zərini atarkən altı qoşanın düşəcəyini əvvəlcədən söyləmək mümkün deyildir. Və ya lotereya biletinin uduşlu olub-olmadığını, bir atəş nəticəsində güllənin hədəfə dəyib-dəyməyəcəyini, təsadüfi götürülən bir domino daşında ən böyük xalın olmasını və s. əvvəlcədən dəqiq söyləmək mümkünsüzdür.

Bu misalların hər birində tək-tək yoxlamalar (təcrübələr) aparılır və ya sınaqlar keçirilir. Təbiidir ki, hər sınağın keçirilməsi zamanı bir nəticə alınır.

Misallar:

- Şahmat partiyası oynanılır, deməli, sınaq keçirilir. Bu sınaqda qələbə, heç-heçə, məğlubiyyət mümkün ola bilən nəticələrdir.
- Nəzarətçi hazırlanmış detallı yoxlayır, deməli, onu sınaqdan (təcrübədən) keçirir. Bu sınaqda zay məhsul, keyfiyyətli məhsul mümkün nəticələrdir.
- Xəstənin qan qrupu yoxlanılır, deməli təcrübə aparılır. Bu zaman I qrup, II qrup, III qrup aparılan təcrübənin mümkün nəticələridir və s.

Aydındır ki, bu təcrübələrin heç birinin nəticəsini əvvəlcədən söyləmək mümkün deyil, çünki bu hadisələr təsadüfi hadisələrdir.

Təsadüfi hadisələr A, B, C, ... , mümkün (yəqin) hadisələr U, mümkün olmayan (qeyri-mümkün) hadisələr isə V hərfi ilə işarə edilir.

Hər hansı A hadisəsi baş verərkən başqa bir B hadisəsi də hökmən baş verərsə, onda deyirlər ki, birinci hadisə ikincini doğurur. Yəni A hadisəsi baş verərkən hökmən B hadisəsi də baş verir. Məsələn, havanın temperaturu sıfır dərəcədən aşağı düşdükdə yollar buz bağlayır. Deməli, temperaturun sıfır dərəcədən aşağı düşməsi

hadisəsini A, yolların buz bağlaması hadisəsini isə B ilə işarə etsək, deyə bilərik ki, A hadisəsi B hadisəsini doğurur. Doğrudan da havanın temperaturu sıfır dərəcədən aşağı düşdükdə yollar buz bağlamalıdır.

İki hadisənin hər biri digərini qarşılıqlı olaraq doğursa onda bu hadisələr **eynigüclü** hadisələrdir. Yəni A hadisəsi B-ni və eyni zamanda B hadisəsi də A-nı doğursa onda A və B hadisələri eynigüclüdür. Başqa sözlə, A hadisəsi yalnız və yalnız B hadisəsi baş verdikdə baş verərsə, onda A və B eynigüclü hadisələr adlanır. Məsələn, tutaq ki, müəyyən bir torbada üzərində axırı sıfırla bitən müxtəlif ədədlər yazılmış 50 dənə kiçik kubiklər var. Bu torbadan çıxarılan istənilən kubikin nömrəsinin 2-yə bölünməsi hadisəsi A, cüt ədəd olması hadisəsi isə B olsun. Bu halda A hadisəsi baş verdikdə B hadisəsi hökmən baş verəcək və eyni zamanda B hadisəsi baş verdikdə də A hadisəsi baş verəcək. Bu isə o deməkdir ki, A və B hadisələri eynigüclüdür. Bunu belə yazırlar: $A=B$.

Bir sınaq nəticəsində hər ikisinin eyni zamanda baş verməsi mümkün olmayan iki A və B hadisələri **uyuşmayan** hadisələrdir. Yəni A və B hadisələrinin birlikdə baş verməsi mümkün deyildirsə, onda bunlar **uyuşmayan** hadisələr adlanır. Bu anlayışı ikidən çox sayda hadisələr üçün də vermək olar. Yəni bir sınaq nəticəsində istənilən ikisinin eyni vaxtda baş verməsi mümkün olmayan hadisələrə **uyuşmayan** hadisələr deyilir. Belə hadisələrə aşağıdakıları misal göstərmək olar:

- bir atəşdə güllənin hədəfə dəyməsi və dəyməməsi hadisələri;
- şahmat oyununda qələbə, məğlubiyyət və heç-heçə olması hadisələri;

- zər bir dəfə atılarkən həm tək, həm də cüt xalın düşməsi hadisələri və s.

Başqa sözlə, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ hadisələrindən ixtiyari ikisinin eyni vaxtda baş verməsi mümkün deyildirsə, onda bu hadisələrə **cüt-cüt uyuşmayan** hadisələr deyilir. Məsələn, bir zəri bir dəfə atarkən 1, 2, 3, 4, 5, 6 xalı olan üzünün düşməsi hadisəsini uyğun olaraq $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ilə işarə etsək, onda bu hadisələr cüt-cüt uyuşmayan hadisələrdir. Çünki bir zər atılarkən bu xallardan yalnız biri düşə bilər.

Bir sınaq nəticəsində cüt-cüt uyuşmayan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ hadisələrindən biri hökmən baş verərsə, onda $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ hadisələrinə cüt-cüt uyuşmayan **hadisələrin tam qrupu** deyilir.

Hadisələrin tam qrupuna aid misallar: bir zər atılarkən 1, 2, 3, 4, 5, 6 xalların düşməsi, atəş nəticəsində güllənin hədəfə dəyməsi və dəyməməsi, basketbol topunu səbətə atarkən topun səbətə düşməsi və düşməməsi və s.

Müəyyən bir hadisənin baş verməsini A , baş verməməsini isə $\bar{A}$ ilə işarə etsək, onda A və $\bar{A}$ hadisələrinə **qarşılıqlı əks** hadisələr deyilir. Məsələn, suyun donması A hadisəsi, donmaması isə $\bar{A}$ hadisəsidirsə, onda A və $\bar{A}$ hadisələri qarşılıqlı əks hadisələrdir.

Yəqin (mümkün) hadisələrlə, mümkün olmayan (qeyri-mümkün) hadisələr üçün $\bar{U}=V$ və $\bar{V}=U$.

Bir hadisənin digəri ilə müqayisədə elə bir obyektiv baş vermə üstünlüyü yoxdursa, o halda bu hadisələr **eyni imkanlı (eyni ehtimallı)** hadisələr adlanır. Məsələn, bir zər atdıqda beş xal düşməsi hadisəsinin baş verməsinin altı xal düşməsi hadisəsinin baş verməsindən heç bir üstünlüyü yoxdur. Odur ki, bu hadisələr eyni imkanlı (eyni ehtimallı) hadisələrdir. Başqa misallar: basketbol topunun səbətə

düşməsi və düşməməsi, torbadakı yeddisi sarı və doqquzu yaşıl olan limondan təsadüfi çıxarılan bir limonun yaşıl və sarı olması və s.

§2.2. Ehtimalın tərifı. Tezlik anlayışı

1. Ehtimalın klassik tərifı. İnsanlar praktik işlərində hadisələri baş vermə mümkünlüyünün dərəcələrinə görə müqayisə etməyi bacarmalıdırlar. Aydınır ki, “yağış yağması”, “çayların daşaraq sahilyanı əraziləri basması”, “yolların buz bağlanması” və s. hadisələrin baş vermə mümkünlüyü müxtəlif dərəcəlidir. Odur ki, hadisələri müqayisə etmək üçün müəyyən ölçü olmalıdır. Hadisələrin baş verməsinin obyektiv mümkünlük dərəcələrinin ədədi ölçüsü hadisənin ehtimalı adlanır. Təbiidir ki, ehtimalın bu tərifı riyazi tərif deyildir. Odur ki, ehtimalı kəmiyyət baxımından təyin etmək, onun ədədi ifadəsini vermək lazımdır.

Belə bir məsələyə baxaq. Tutaq ki, qutuda hamısı eyni ölçüdə olan 3 qırmızı, 2 göy və 1 yaşıl kürəcik, yəni cəmi 6 kürəcik var. Aydınır ki, bu qutudan qırmızı kürəciyin çıxarılması mümkünlüyü göy və ya yaşıl kürəciyin çıxarılma mümkünlüyündən daha realdır və bu mümkünlüyü ədədlə ifadə etmək olar. Həmin bu ədədi hadisənin (qutudan qırmızı kürəciyin çıxması hadisəsinin) ehtimalı adlandırırlar. Beləliklə, ehtimal hadisənin baş verməsinin mümkünlük dərəcəsinə ifadə edən ədəddir.

İndi isə qutudan təsadüfi çıxarılan kürəciyin qırmızı olmasının mümkünlük dərəcəsinə kəmiyyətce qiymətləndirək. Bunun üçün qutudan təsadüfi çıxarılan kürəciyin qırmızı olması hadisəsinə A ilə işarə edək. Keçirilən hər bir sınağın nəticəsini, yəni qutudan hər dəfə bir

kürəciyin çıxarılması hadisəsini elementar nəticə (elementar hadisə) adlandıraraq. Onda keçirilən sınaqlar zamanı bu məsələdə 6 elementar nəticənin alınması mümkündür. Başqa sözlə desək 6 elementar hadisə baş verməlidir. Çünki qutuda cəmi 6 kürəcik var. Bu nəticələri (elementar hadisələri) B₁, B₂, B₃, B₄, B₅, B₆ ilə işarə edək:

B₁, B₂, B₃- qutudan qırmızı kürəcik çıxarıldı,

B₄, B₅ - qutudan göy kürəcik çıxarıldı,

B₆ - qutudan yaşıl kürəcik çıxarıldı.

Aydın ki, bu nəticələr cüt-cüt uyuşmayan hadisələrin tam qrupunu əmələ gətirir (hər sınaqda yalnız bir kürəcik çıxır) və onlar eyni imkanlıdır (kürəciklər təsadüfi çıxarılır, ölçüləri və formaları tamamilə eynidir, yalnız rəngləri fərqlidir). Alınan bütün mümkün elementar nəticələr arasındakı bizi maraqlandıran hadisənin baş verməsinə gətirib çıxaran nəticələrə həmin hadisə üçün əlverişli nəticələr deyilir. Baxılan məsələdə A hadisəsinin (qutudan qırmızı kürəciyin çıxması hadisəsinin) baş verməsi üçün əlverişli nəticələr bunlardır: B₁, B₂, B₃.

Beləliklə, sınaq zamanı A hadisəsi üçün əlverişli olan nəticələrdən biri, ya B₁, ya B₂ ya da B₃ alınan kimi A hadisəsi baş verir. Yəni bu halda A hadisəsi bir neçə elementar hadisələrə (B₁, B₂, B₃) bölünür.

A hadisəsi üçün əlverişli nəticələr (hallar) sayının bütün mümkün nəticələr (hallar) sayına olan nisbətində A hadisəsinin ehtimalı deyilir və $P(A)$ ilə işarə edilir.

Baxdığımız misalda bütün elementar nəticələrin sayı $n=6$ və bunlardan isə A hadisəsi üçün əlverişli olanlarının sayı $m=3$ olur. Deməli, qutudan təsadüfi çıxarılan kürəciyin qırmızı olması ehtimalı $P(A)=3/6=1/2$ olacaq. Bu tapılan ədəd qutudan təsadüfi çıxarılan kürəciyin qırmızı olması mümkünlüyünün kəmiyyətə qiymətini göstərir.

Keçirilən sınaqların şərtinə görə fərqli və xarakterinə görə isə eyni olan bir neçə təsadüfi hadisəyə baxaq:

- Qutudakı 5-i ağ olan 12 kürəcikdən təsadüfi çıxarılan kürəciyin ağ rəngli olması hadisəsi A olsun.
- Qutudakı 2-si ağ olan 12 kürəcikdən təsadüfi çıxarılan kürəciyin ağ rəngli olması hadisəsi B olsun.
- Qutudakı 8-i ağ olan 12 kürəcikdən təsadüfi çıxarılan kürəciyin ağ rəngli olması hadisəsi C olsun.

Burada göstərilən sınaqların hər üçündə belə bir şərt nəzərdə tutulur ki, qutuda olan kürəciklər yalnız rəngləri ilə fərqlənə bilərlər və onların bütün qalan əlamətləri (çəkisi, ölçüsü v.s.) eynidir.

Eyni zamanda sınaqların nəticələrinin heç birinə digəri ilə müqayisədə üstünlük verilməməlidir. Bu isə o deməkdir ki, bütün sınaqların nəticələri həm də eyni imkanlıdır (eyni ehtimallıdır).

Sınaqların nəticəsi bütün kürəciklərdən yalnız birinin çıxarılmasından ibarətdir, yəni keçirilən sınaqların mümkün nəticələri uyuşmayandır. Bu halda bütün sınaqların nəticələri arasından yalnız bizi maraqlandıran hadisəyə gətirib çıxara biləcək nəticələr seçilir. Bu nəticələrə isə həmin hadisə üçün əlverişli olan nəticələr deyilir.

Məsələn, birinci misalda A hadisəsinin baş verməsi üçün 12 mümkün sınağın nəticəsindən 5-i əlverişli nəticədir. Yəni qutudan ən çoxu 12 kürəcik çıxarıla bilər ki, bunların da yalnız beşində çıxarılan kürəcik ağ rəngli olar. Çünki, şərtdə görə qutudakı 12 kürəciyin yalnız 5-i ağdır. Eləcə də üçüncü misalda, B hadisəsinin baş verməsi üçün 12 mümkün sınaq nəticəsindən 8-i əlverişli nəticədir. Yəni qutudan yalnız

8 dəfə ağ rəngli kürəcik çıxarıla bilər. Çünki qutudakı 12 kürəciyin 8-i ağdır.

Beləliklə, bu məlumatlar baxılan üç hadisənin hər birinin baş vermə ehtimalını qiymətləndirməyə imkan verir. O cümlədən, baxılan A, B və C hadisələrinin baş verməsi ehtimalı müvafiq olaraq $\frac{5}{12}$, $\frac{2}{12}$ və $\frac{8}{12}$ olur.

Bu nəticələri qısaca aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$P(A) = \frac{5}{12}, \quad P(B) = \frac{2}{12}, \quad P(C) = \frac{8}{12}$$

və ya

$$P_1 = \frac{5}{12}, \quad P_2 = \frac{2}{12} \quad \text{və} \quad P_3 = \frac{8}{12}.$$

Nəhayət, ehtimalın hesablanması üçün ümumi qaydanı vermək olar.

Tutaq ki, keçirilmiş bütün sınaqlardan sonra alınan n sayda ($E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$) cüt-cüt uyuşmayan, eyni ehtimallı nəticələrdən m saydası ($E_1, E_2, E_3, \dots, E_m$) bizi maraqlandıran A hadisəsi üçün əlverişli nəticələrdir.

Tərif: A hadisəsinin baş verməsi üçün keçirilən sınaqların əlverişli nəticələr sayının bütün mümkün (cüt-cüt uyuşmayan, eyni ehtimallı) nəticələr sayına olan nisbətində bu hadisənin ehtimalı deyilir.

Deməli,

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad \text{və ya} \quad P = \frac{m}{n}, \quad (1)$$

burada, m - keçirilən sınaq zamanı A hadisəsi üçün əlverişli olan nəticələrin sayı; n - keçirilən sınaq zamanı alınan bütün mümkün nəticələrin sayıdır.

Bu ehtimalın klassik tərifidir. Burada P -azərbaycanca “ehtimal” mənasını verən “probability” ingilis sözünün

birinci hərfidir və $0 \leq m \leq n$. Bu düstur belə oxunur: “A hadisəsinin ehtimalı $\frac{m}{n}$ - ə bərabərdir”.

Tutaq ki, bir torbada 50 dənə kiçik ölçülü plastik kubiklər var və bu kubiklərin 30-u qırmızıdır. Torbadan hər dəfə bir kubik çıxarılmasını (çıxarılmış kubiki torbaya qaytarmamaq şərtlə) bir sınaq hesab etsək, onda cəmi 50 sınaq keçirilə bilər və deməli, bütün sınaqların mümkün nəticələrinin sayı 50 olar. Torbadan çıxarılan kubikin qırmızı olması hadisəsinə A ilə işarə etsək, o halda bütün sınaqların A hadisəsi üçün əlverişli nəticələrinin sayı 30 olar. Odur ki, A hadisəsinin ehtimalı, bu hadisənin baş verməsi üçün əlverişli olan nəticələr sayının bütün mümkün nəticələr sayına olan nisbətində bərabərdir.

Deməli, A hadisəsinin ehtimalını $P(A)$, keçirilən sınağın əlverişli nəticələri sayını m , sınağın bütün mümkün nəticələri sayını isə n ilə işarə etsək

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad \text{və ya} \quad P = \frac{m}{n}$$

alarıq.

Təsadüfi hadisə üçün $m < n$, yəqin hadisə üçün $m = n$ və mümkün olmayan hadisə üçün isə $m=0$ olur. Buradan isə istənilən hadisənin ehtimalının qiymətinin sərhədləri belə təyin edilir: $0 \leq P \leq 1$.

M ə s ə l ə 1. Bir il 365 gündürsə, yeni təqvimin (kalendarın) təsadüfi cırılan vərəqinin ayın otuzu gününə aid olması ehtimalını tapın.

H ə l l i. Təqvimin vərəqləri təsadüfi cırıldığından sınağın bütün nəticələri eyni ehtimallıdır. Cırılan vərəqin ayın otuzu gününə aid olması hadisəsinə A ilə işarə edək. Təqvimdə 365 gün olduğundan sınaqların bütün mümkün nəticələrinin sayı $n=365$ olur. Lakin bu nəticələrin arasında

A hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı 11 olur. Başqa sözlə, cəmi 365 sınaq keçirilir ki, bunlardan da yalnız 11 sınaq A hadisəsi üçün əlverişlidir. Buradan,

$$P(A) = \frac{11}{365} \quad \text{və ya} \quad P = \frac{11}{365} \quad \text{olur.}$$

M ə s ə l ə 2. Bir oyun zərini bir dəfə atdıqda düşən xallar sayının cüt ədəd olma ehtimalını tapın.

H ə l l i. Düşən xalın cüt olması hadisəsi A olsun. Aydındır ki, sınağın bütün mümkün nəticələrinin sayı 6 və A hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı isə 3-dür. Belə ki, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ədədləri arasında yalnız üç dənə cüt ədəd var: 2, 4, 6. Onda tərifə görə A hadisəsinin ehtimalı

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{və ya} \quad P = \frac{1}{2}$$

olur.

M ə s ə l ə 3. Domino daşları arasından təsadüfi olaraq biri götürülür. Üzərində cəmi 6 xal olan domino daşının götürülmə ehtimalını tapın.

H ə l l i. Təsadüfi olaraq götürülən domino daşı üzərində 6 xalın olması hadisəsini A ilə işarə edək. Domino daşı təsadüfi olaraq götürüldüyü üçün sınağın bütün nəticələri eyni ehtimallıdır. Cəmi 28 domino daşı var. Deməli, sınaqların bütün mümkün nəticələrinin sayı $n=28$ olur. Lakin bu nəticələrdən yalnız 4-ü A hadisəsi üçün əlverişli nəticələrdir: 0-6, 1-5, 2-4, 3-3. Yəni $m=4$ olur. Odu ki, A hadisəsinin ehtimalı

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7} \quad \text{və ya} \quad P = \frac{1}{7}$$

olur.

M ə s ə l ə 4. Bütün ikirəqəmli ədədlərlə nömrələnmiş və tamamilə eyni formada bükülərək bir qutuya yerləşdirilmiş talonlar arasından təsadüfi olaraq istənilən biri

götürülür. Götürülən talonun nömrəsinin eyni rəqəmli ədəd olması ehtimalını tapın.

H ə l l i: Aydındır ki, bütün talonların sayı $n=90$ və nömrəsinin rəqəmləri eyni (11, 22, 33, ..., 99) olan talonların sayı isə $m=9$ -dur. Yəni sınaqların bütün mümkün nəticələrinin sayı $n=90$ və əlverişli nəticələrinin sayı isə $m=9$ olur. Odur ki, təsadüfi götürülən talonun nömrəsinin eyni rəqəmli ədəd olma ehtimalı belə tapılır:

$$P = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}.$$

M ə s ə l ə 5. Bir torbada 6 qırmızı və 4 yaşıl alma var. Bu torbadan təsadüfi olaraq 2 alma götürülür. Bu almaların hər ikisinin qırmızı olması ehtimalını tapın.

H ə l l i: Torbadan götürülən 2 almanın qırmızı olması hadisəsinə A ilə işarə edək. Deməli, 10 meyvədən seçilən iki-iki qrupların ümumi sayı, yəni sınaqların bütün mümkün nəticələrinin sayı $n = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = 45$ olur. Əlverişli nəticələrin sayı isə 6 qırmızı almadan seçilən iki-iki qrupların sayına bərabər olur: $m = C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15$. Ona görə də axtarılan ehtimal aşağıdakı kimi hesablanır:

$$P(A) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}.$$

Bu məsələni aşağıdakı kimi ümumiləşdirmək olar.

M ə s ə l ə 6. Tutaq ki, torbada hamısı eyni böyüklükdə olan k sayda yaşıl və l sayda sarı Lənkəran limonu var. Torbadan təsadüfi olaraq eyni vaxtda çıxarılan iki limonun yaşıl olması ehtimalını tapın.

H ə l l i. Torbadan çıxarılan hər iki limonun yaşıl olması hadisəsi A olsun. Torbadakı limonların ümumi sayı

$k+l$ -ə bərabərdir. Deməli, torbadakı bütün limonların sayı $k+l$ olduğundan limonlar arasından götürülən iki-iki qrupların sayı (və ya torbadan iki limon çıxarmaq üsullarının sayı) $n = C_{k+l}^2 = \frac{(k+l)(k+l-1)}{2}$ olur. Eyni zamanda torbadakı yaşıl limonların sayı k -ya bərabər olduğundan onların arasından iki dənəsini $m = C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2}$ üsulla çıxarmaq olar. Ona görə də axtarılan ehtimal belə olur:

$$P(A) = \frac{C_k^2}{C_{k+l}^2} = \frac{k(k-1)}{(k+l)(k+l-1)} .$$

2. Tezlik anlayışı. Ehtimalın tərifinə təsadüfi hadisənin baş vermə imkanının ölçüsü kimi yaxınlaşmaq üçün çoxsaylı sınaqlar ardıcılığının nəticələrinə baxırlar. Tutaq ki, aparılmış n sayda sınaq nəticəsində müəyyən bir A hadisəsi m dəfə baş vermişdir. Bu halda m ədədinə həmin hadisənin baş vermə tezliyi (mütləq tezlik), $\frac{m}{n}$ nisbətinə isə onun nisbi tezliyi deyilir.

Adətən müşahidələrin nəticəsi göstərir ki, az sayda ardıcıl sınaqların aparılması nəticəsində təsadüfi hadisənin nisbi tezliyi nəzərəcarpacaq dərəcədə əyri xətt üzrə dəyişdiyi halda, çoxsaylı sınaqlar ardıcılığına keçən kimi bu əyri tədricən düzəlməyə başlayır və bizi maraqlandıran tezlik çox böyük sayda müşahidələr zamanı sanki dayanıqlı qiymətlər alır. Belə ki, A hadisəsi üçün əlverişli sınaqlar sayının bütün aparılan sınaqlar sayına olan nisbəti $\frac{m}{n}$ demək olar ki, sabit qalır. Qeyd etdiyimiz kimi bu nisbət A hadisəsinin baş verməsinin nisbi tezliyi olur.

Bəs hadisənin nisbi tezliyi ilə ehtimalı arasındakı fərq nədən ibarətdir?

Aparılan təcrübələr göstərir ki, sınaq prosesi kütləvi xarakter aldıqda, hadisənin nisbi tezliyi onun ehtimalına çox yaxın olur. Belə ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\frac{m}{n}$ tezliyi A hadisəsinin ehtimalı adlanan müəyyən bir $P(A)$ sabiti ətrafında dəyişir. Buradan belə bir nəticəyə gəlirik ki, hadisənin nisbi tezliyinə ehtimalın təqribi qiyməti kimi baxmaq olar: $P(A) \approx \frac{m}{n}$.

§2.3. Ehtimalın xassələri

Yuxarıda verilmiş (1) düsturundan istifadə edərək ehtimalın aşağıdakı xassələrinə baxmaq olar:

I. Yəqin hadisənin ehtimalı vahidə bərabərdir.

Doğrudan da, tərifə görə yəqin hadisələr bütün sınaqların hamısında baş verir. Yəni belə hadisələr üçün keçirilən sınağın bütün nəticələri əlverişli olur. Başqa sözlə desək, sınağın əlverişli nəticələrinin sayı bütün mümkün nəticələr sayına bərabər olur və ya $m=n$ olur. Buradan isə alınır ki,

$$P(U) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Yəni $P(U)=1$ olur.

II. Mümkün olmayan hadisənin ehtimalı sıfıra bərabərdir.

Tərifə görə mümkün olmayan hadisə heç bir sınaq nəticəsində baş vermir. Yəni bu halda sınağın əlverişli nəticələr sayı sıfır, mümkün nəticələr sayı isə sıfırdan fərqli olur: $m=0$, $n \neq 0$.

Buradan,
$$P(V) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Yəni $P(V)=0$ olur.

III. *A hadisəsi ilə qarşılıqlı əks olan $\bar{A}$ hadisəsinin ehtimalı vahid ilə A hadisəsinin ehtimalı fərqi bərabərdir. Yəni*

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Doğrudan da, A hadisəsi üçün sınağın əlverişli nəticələr sayı m , bütün mümkün nəticələr sayı isə n olarsa, onda $\bar{A}$ hadisəsi üçün sınağın əlverişli nəticələr sayı $n-m$ olar. Onda ehtimalın tərifinə görə alırıq:

$$P(\bar{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A)$$

Deməli,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

IV. *A hadisəsi B hadisəsini doğurursa, onda A -nın ehtimalı B -nin ehtimalını aşmır.*

Yəni $P(A) \leq P(B)$.

Doğrudan da, A hadisəsi B hadisəsini doğurursa, onda A üçün sınaqların bütün əlverişli nəticələri B üçün də əlverişli olmalıdır. Başqa sözlə, A üçün sınaqların bütün əlverişli nəticələrinin sayı B üçün əlverişli olan nəticələr sayına bərabər olmalıdır. Yəni, A hadisəsinin baş verdiyi bütün hallarda B hadisəsi də baş verməlidir. Odur ki, A hadisəsinin ehtimalı B hadisəsinin ehtimalını aşmır, yəni

$$P(A) \leq P(B).$$

V. *Eynigüclü hadisələrin ehtimalları bərabərdir.*

Tutaq ki, A və B hadisələri eynigüclüdür. Yəni $A=B$. Onda eynigüclü hadisələrin tərifinə görə A hadisəsi B -ni və ələcə də B hadisəsi A -nı doğurur. Digər tərəfdən, dördüncü xassəyə əsasən $P(A) \leq P(B)$ olur. Eyni zamanda $P(B) \leq P(A)$ olduğundan $P(A) = P(B)$.

§2.4. Ehtimalların cəmi və hasili haqqında teoremlər

1. Hadisələrin cəmi və hasili. Hadisələr üzərində əməllərə baxaq. Bu əməllər verilmiş hadisələrdən yeni başqa hadisələr almağa imkan verir.

Tutaq ki, A və B hadisələri verilmişdir. Əvvəlcə bu hadisələrin cəmi adlanan yeni $A+B$ və ya $A \cup B$ hadisəsinə tərif verək.

Tərif: Yalnız və yalnız A və B hadisələrinin heç olmasa biri baş verdikdə baş verən hadisəyə A və B hadisələrinin cəmi deyilir və simvolik olaraq belə işarə edilir: $A \cup B$ və ya $A+B$.

Və ya A və B hadisələrinin cəmi elə C hadisəsinə deyilir ki, bu hadisə ya A hadisəsi, ya B hadisəsi, ya da bu hadisələrin hər ikisi baş verərkən baş verir: $C=A+B$ və ya $C=A \cup B$.

Və ya A və B hadisələrindən heç olmasa birinin baş verməsi hadisəsinə A və B hadisələrinin cəmi deyilir: $A \cup B$ və ya $A+B$.

Məsələn, tutaq ki, bir lotereya biletinin udması hadisəsi A , digər lotereya biletinin udması hadisəsi isə B -dir. Onda $A+B=C$ hadisəsi heç olmasa bir lotereya biletinin udması, yəni, ya birinci lotereya biletinin, ya ikinci lotereya biletinin, ya da hər ikisinin eyni vaxtda udması hadisəsidir.

Digər bir misal, tutaq ki, bir qutuda qara, qırmızı və rənglənmemiş kürəciklər var. Qutudan təsadüfi olaraq çıxarılan kürəciyin qırmızı olması hadisəsinə A , qara olması hadisəsinə isə B ilə işarə edək. Onda $A+B=C$ hadisəsi qutudan çıxarılan ixtiyari kürəciyin rəngli olması hadisəsidir.

Beləliklə, A və ya B hadisələrinin hər hansı birinin baş verməsi $A+B$ hadisəsinin də baş verməsinə səbəb olur.

Başqa sözlə desək, A və ya B hadisələrinin birinin baş verməsi $A+B$ hadisəsini doğrurur.

İndi isə A və B hadisələrinin hasili adlanan AB və ya $A \cap B$ hadisəsinə tərif verək.

T ə r i f: Yalnız və yalnız A və B hadisələrinin hər ikisi eyni vaxtda baş verdikdə baş verən hadisəyə A və B hadisələrinin hasili deyilir və simvolik olaraq belə işarə edilir: AB və ya $A \cap B$.

Və ya A və B hadisələrinin hasili elə C hadisəsinə deyilir ki, bu hadisə A və B hadisələrinin hər ikisi eyni vaxtda baş verərkən baş verir: $C=AB$ və ya $C=A \cap B$.

Və ya A və B hadisələrinin hər ikisinin birlikdə baş verməsi hadisəsinə A və B hadisələrinin hasili deyilir: AB və ya $A \cap B$.

Məsələn, A hadisəsi bir lotereya biletinin udma hadisəsi, B isə ikinci lotereya biletinin udma hadisəsi olarsa, onda $AB=C$ hadisəsi hər iki biletin eyni vaxtda udma hadisəsi olacaq.

Daha bir misal, məlumdur ki, lotereya biletinin videokamera udması üçün həm bilet nömrəsi, həm də seriya nömrəsi düşməlidir. Videokamera udmaq üçün lotereyanın bilet nömrəsinin düşməsi hadisəsi A , seriya nömrəsinin düşməsi hadisəsi isə B olsun. Onda $AB=C$ hadisəsi videokamera udmaq hadisəsi olacaq.

Yuxarıda qarşılıqlı əks hadisələr haqqında məlumat vermişdik.

T ə r i f: Tutaq ki, A hadisəsi baş vermişdir. Yalnız və ya yalnız A hadisəsi baş verərkən baş verməyən hadisəyə A hadisəsi ilə qarşılıqlı əks hadisə deyilir və $\bar{A}$ ilə işarə edilir (belə oxunur: A -nın inkarı və ya A -nın əksi). Məsələn, atılan güllələrin hər ikisinin hədəfə dəyməsi hadisəsi A

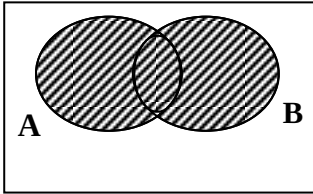
olsun. Onda $\bar{A}$ bu güllələrdən heç olmasa birinin hədəfə dəyməməsi hadisəsidir.

Qeyd etmək lazımdır ki, qarşılıqlı əks hadisələr üçün aşağıdakı münasibətlər ödənilir:

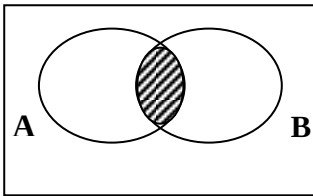
$$A + \bar{A} = U \text{ və ya } A \cup \bar{A} = U \quad (2)$$

$$A \bar{A} = V \text{ və ya } A \cap \bar{A} = V \quad (3)$$

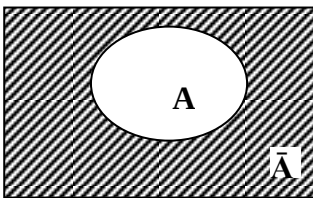
Bu münasibətlərdən biri ödənmirsə, onda baxılan hadisələr qarşılıqlı əks hadisələr deyil. Məsələn, təsadüfi götürülən ikirəqəmli ədədin cüt rəqəmlərdən ibarət olması hadisəsi A , tək rəqəmlərdən ibarət olması hadisəsi isə B olsun. Bu



Şək. 1



Şək. 2



Şək. 3

hadisələr üçün (2) münasibəti ödənilir, lakin (3) münasibəti ödənmir. Ona görə də bu hadisələr qarşılıqlı əks hadisələr deyil.

Eyler-Venn diaqramından istifadə etməklə hadisələr üzərində əməllərin əyani şəkildə təsvirini vermək olar. Bunun üçün tutaq ki, diaqramda verilmiş düzbucaqlı bütün mümkün elementar hadisələri, bu düzbucaqlı daxilindəki dairələr isə aparılan sınaqlar zamanı baş verən təsadüfi hadisələri göstərir. Onda hadisələrin cəmi $A+B$ (və ya $A \cup B$), hadisələrin hasili AB (və ya $A \cap B$), eləcə də əks hadisə $\bar{A}$ uyğun olaraq şəkil 1, şəkil 2 və şəkil 3-də verilmiş Eyler-Venn diaqramlarının ştrixlənmiş hissələri ilə göstərilə bilər.

2. Toplama teoremi. Yuxarıda baxılan məsələlərdə hadisələrin ehtimalı bilavasitə klassik ehtimalın tərifinə əsaslanaraq hesablanırdı. Lakin ehtimalın bu yolla hesablanması yalnız ən sadə hallarda səmərəli olur. Belə ki, adətən keçirilən sınağın bütün mümkün nəticələrini, eləcə də onların arasından hadisə üçün əlverişli olanlarını birbaşa hesablamaq əlverişsiz olur, və bəzi hallarda isə özünün mürəkkəbliyi baxımından bu hesablamanı aparmaq ümumiyyətlə mümkün olmur. Bununla yanaşı hadisələrin ehtimalları arasında əlaqə yaradan teoremdən istifadə etməklə ehtimalların hesablanmasını ciddi şəkildə sadələşdirmək olar.

Əvvəlcə aşağıdakı məsələyə baxaq.

M ə s ə l ə 1. Tələbələrin imtahan yazı işləri 1-dən 90-a qədər olan tam ədədlərlə kodlaşdırılıb. Təsadüfi götürülmüş yazı işinin nömrəsinin 10-a və ya 11-ə bölünməsi ehtimalını tapın.

H ə l l i. Yazı işinin nömrəsinin 10-a bölünməsi hadisəsini A ilə, 11-ə bölünməsi hadisəsini isə B ilə işarə edək. Onda yazı işinin nömrəsinin 10-a və ya 11-ə bölünməsi hadisəsi $A+B=C$ olacaq. Aydındır ki,

$$P(A) = \frac{9}{90}, \quad (4)$$

$$P(B) = \frac{8}{90}. \quad (5)$$

Digər tərəfdən A və B hadisələri uyuşmayandır, hər ikisinin eyni vaxtda baş verməsi mümkün deyildir ($AB=\emptyset$). Ona görə də $A+B=C$ hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı 17 olur. Buradan isə alırıq:

$$P(C) = P(A+B) = \frac{17}{90}. \quad (6)$$

Nəhayət, (6)-nı (4) və (5) ilə müqayisə etdikdə görürük ki, $A+B=C$ hadisəsinin ehtimalı ilə A və B hadisələrinin ehtimalları cəmi bərabərdir. Yəni

$$P(A) + P(B) = \frac{9}{90} + \frac{8}{90} = \frac{17}{90} = P(A+B).$$

T e o r e m 1. İki uyuşmayan A və B hadisələrinin cəminin ehtimalı bu hadisələrin ehtimalları cəminə bərabərdir, yəni

$$P(A+B) = P(A)+P(B). \quad (7)$$

İ s b a t 1. Tutaq ki, Tutaq ki, A və B uyuşmayan hadisələrdir, yəni hər ikisinin eyni vaxtda baş verməsi mümkün deyildir. Keçirilən sınağın bütün mümkün nəticələrinin sayı n , eyni zamanda A hadisəsinin baş verməsi üçün əlverişli nəticələrin sayı m və B hadisəsinin baş verməsi üçün əlverişli nəticələrin sayı isə k olsun. A və B hadisələri uyuşmayan hadisələr olduğundan keçirilən bütün mümkün sınaqların nəticələri arasında eyni vaxtda həm A və həm də B hadisəsi üçün əlverişli olan nəticələr yoxdur. Deməli, $C=A+B$ hadisəsi üçün, başqa sözlə, A və ya B hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı $m+k$ olacaq. Onda ehtimalın tərifinə görə A və B hadisələrinin ehtimalları uyğun olaraq $P(A)=\frac{m}{n}$ və $P(B)=\frac{k}{n}$, eləcə də $C=A+B$ hadisəsinin ehtimalı

$$P(A+B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n}$$

olur. Deməli, $P(A+B) = P(A)+P(B)$, burada $AB=\emptyset$. Teorem isbat olundu.

Bu teorem uyuşmayan hadisələr üçün *t o p l a m a t e o r e m i* adlanır.

Qeyd edək ki, bu teoremi riyazi induksiya üsulundan istifadə edərək n sayda cüt-cüt uyuşmayan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ hadisələri üçün də isbat etmək olar. Yəni

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n).$$

M ə s ə l ə 2. Səidin torbasında 4 dənə qırmızı və 5 dənə yaşıl rənglə boyanmış bayram yumurtası, 7 dənə isə rənglənməmiş yumurta var. Torbadan təsadüfi olaraq çıxarılan istənilən yumurtanın rəngli olması ehtimalını tapın.

H ə l l i: Torbadan təsadüfi çıxarılan yumurtanın qırmızı olma hadisəsini A , yaşıl olma hadisəsini B , ümumiyyətlə rəngli olması hadisəsini isə C ilə işarə edək. Şərtə görə torbada cəmi 16 dənə yumurta var. Bunların 4 dənəsi qırmızı rəngdə olduğu üçün torbadan çıxarılan istənilən yumurtanın qırmızı olması ehtimalı $P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

olar. Eyni zamanda torbadakı yumurtaların 5 dənəsi yaşıl rəngli olduğundan çıxarılan istənilən yumurtanın yaşıl olması ehtimalı $P(B) = \frac{5}{16}$ olar. Digər tərəfdən torbada $4+5=9$ dənə

rənglənməmiş yumurta var. Ona görə də torbadan çıxarılan istənilən yumurtanın rəngli olması ehtimalı $P(C) = \frac{9}{16}$. Eyni

zamanda hadisələr uyuşmayan olduğundan

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{5}{16} = \frac{9}{16} \text{ olacaq.}$$

M ə s ə l ə 3. Toxuculuq fabrikində dəzgah qırmızı, yaşıl və göy saplarla işləyir və sap qırılarkən dəzgah dayanır. Gün ərzində işlənən sapların qırılma ehtimalları adətən müvafiq olaraq 0,006; 0,01 və 0,025 olur. Dəzgahın dayanma ehtimalını tapın.

H ə l l i: Dəzgahın dayanması hadisəsi A, qırılan sapların qırmızı, yaşıl və göy rəngdə olması hadisələri isə müvafiq olaraq B, C, D olsun. Ona görə də $A=B+C+D$ olur. Odur ki, B, C, D hadisələri uyuşmayan (birlikdə baş verməyən) olduğundan

$$P(A)=P(B)+P(C)+P(D)=0,006+0,01+0,025=0,041.$$

N ə t i c ə. Qarşılıqlı əks hadisələrin ehtimalları cəmi vahidə bərabərdir, yəni

$$P(A)+P(\bar{A})=1. \quad (8)$$

Doğrudan da, A və $\bar{A}$ hadisələri qarşılıqlı əks hadisələr olduğundan onlara toplama teoremini tətbiq etmək olar:

$$P(A+\bar{A})=P(A)+P(\bar{A}).$$

Burada $A+\bar{A}$ cəmi mümkün (yəqin) hadisə olduğu üçün və buna görə də $P(A+\bar{A})=1$ olduğundan alırıq:

$$P(A)+P(\bar{A})=1.$$

Qeyd edək ki, iki hadisə üçün toplama teoremi başqa bir istiqamətdə ümumiləşdirilə bilər. Yəni teoremin şərtindəki hadisələrin uyuşmazlığı tələbindən imtina etsək, onda daha ümumi teorem isbat etmək olar ki, buradan da yuxarıda isbat edilmiş teorem xüsusi hal kimi alınır.

Beləliklə, ümumi hala baxaq.

T e o r e m 2: İstənilən iki hadisənin cəminin ehtimalı onların ehtimallarının cəmi ilə bu hadisələrin hasilinin ehtimalı fərqiə bərabərdir, yəni

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (9)$$

və ya

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (10)$$

İ s b a t ı: Tutaq ki, A hadisəsi üçün sınağın əlverişli nəticələrinin sayı m, B hadisəsi üçün isə k-dır. Həm də AB hadisəsinin, yəni A və B hadisələrinin hər ikisinin eyni

vaxtda baş verməsi üçün əlverişli nəticələrin sayı t olsun. Əgər sınağın bütün mümkün nəticələrinin sayı n olarsa, onda ehtimalın tərifinə görə alırıq:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad P(B) = \frac{k}{n} \quad \text{və} \quad P(AB) = \frac{t}{n}.$$

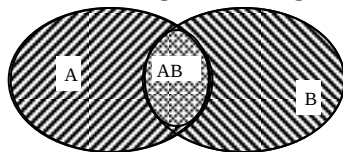
Aydındır ki, bu halda $A+B$ hadisəsi üçün sınağın əlverişli nəticələrinin sayı $m+k-t$ olacaq. Odur ki, $A+B$ hadisəsinin ehtimalı aşağıdakı kimi olur:

$$P(A+B) = \frac{m+k-t}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{t}{n} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Teorem isbat olundu.

İki uyuşan A və B hadisələri üçün Eyler-Venn diaqramına baxmaqla da bu teoremin doğru olduğuna inanmaq olar (şəkil 4).

Əgər A və B hadisələri uyuşmayan (hər ikisi eyni vaxtda baş verməyən) hadisələdirsə, onda $AB=V$ və ona görə də $P(AB)=0$ olur. Bu halda (9) düsturu uyuşmayan hadisələr üçün (yəni $AB=V$) aşağıdakı kimi olur:



Şəkil 4.

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \quad (11)$$

Bundan əvvəlki teoremdə isbat olunmuş uyuşmayan iki A və B hadisəsi üçün nəzərdə tutulan (7) və ya (11) düsturu bu teoremdə isbat olunan (9) düsturundan xüsusi hal kimi alınır. Belə ki, xüsusi halda, hadisələr uyuşmayan olduqda, yəni $A \cap B = V$ və ya $AB=V$ olduqda, $P(AB)=0$ və ya $P(A \cap B)=0$ olur və nəticədə yuxarıda isbat olunan 1-ci teorem alınır.

M ə s ə l ə 4. Bir oyun zəri atılarkən düşən xalın ya cüt ədəd, ya 3-ə bölünən ədəd ya da eyni vaxtda 3-ə bölünən cüt ədəd olması ehtimalını tapın.

H ə l l i: Məsələdə iki uyuşan hadisəyə baxılır. Zər atılarkən düşən xalın cüt ədəd olması hadisəsi A və 3-ə bölünən ədəd olması hadisəsi isə B olsun. Aydındır ki, zər atılarkən bu hadisələrin hər ikisi eyni vaxtda baş verə bilər. Odur ki, A və B hadisələrinin hər ikisinin eyni vaxtda baş verməsi hadisəsini AB ilə işarə edək.

Bundan sonra iki uyuşan hadisənin ehtimallarının toplanması düsturunu tətbiq etməklə müvafiq ehtimalları aşağıdakı kimi hesablayaq:

1) Zər atılarkən düşə biləcək bütün mümkün xalların sayı $n=6$ və A hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı $m=3$ olduğu üçün düşən xalın cüt ədəd olması ehtimalı

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ olur;}$$

2) B hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı $m=2$ olduğundan düşən xalın 3-ə bölünən ədədlə ifadə olunması ehtimalı

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ olur;}$$

3) AB hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı $m=1$ olduğundan zər atılarkən düşən xalın eyni vaxtda həm cüt və həm də 3-ə bölünən ədəd olması ehtimalı, yəni AB hadisəsinin ehtimalı aşağıdakı kimi tapılır:

$$P(AB) = \frac{1}{6} .$$

Nəhayət, ehtimallar üçün ümumiləşmiş toplama düsturundan istifadə edərək alırıq:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Beləliklə, zər atılarkən düşən xalın ya cüt ədəd, ya 3-ə bölünən ədəd ya da eyni vaxtda həm cüt, həm də 3-ə bölünən ədəd olması ehtimalı

$$P = \frac{2}{3} \text{ olur.}$$

M ə s ə l ə 5. Təsadüfi olaraq söylənən hər hansı ikirəqəmli ədədin ya 2-yə, ya 5-ə, ya da eyni vaxtda 2-yə və 5-ə bölünməsi ehtimalını tapın.

H ə l l i: Təsadüfi söylənmiş ikirəqəmli ədədin 2-yə bölünməsi hadisəsi A, həmin ədədin 5-ə bölünməsi hadisəsi isə B olsun. Göründüyü kimi A və B hadisələri uyuşan hadisələrdir, yəni təsadüfi söylənən ikirəqəmli ədəd eyni vaxtda həm 2-yə, həm də 5-ə bölünə bilər.

Bütün ikirəqəmli ədədlərin 10,11,...,99 sayı 90-a bərabərdir. Yəni bütün mümkün sınaqların sayı $n=90$ olacaq. Aydındır ki, bu ədədlərdən 45 dənəsi 2-yə bölünür. Deməli, A hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı $m=45$ olur.

Digər tərəfdən, bütün ikirəqəmli ədədlərin 18 dənəsi isə 5-ə bölünür. Bu da o deməkdir ki, B hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı $k=18$ olur.

Nəhayət, bütün ikirəqəmli ədədlərin yalnız 9 dənəsi həm 2-yə və həm də 5-ə bölündüyündən AB (və ya $A \cap B$) hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı $t=9$ olur.

Bu göstərilənlərdən istifadə edərək müvafiq ehtimalları

$$\text{hesablaraq: } P(A) = \frac{m}{n} = \frac{45}{90} = 0,5;$$

$$P(B) = \frac{k}{n} = \frac{18}{90} = 0,2;$$

$$P(AB) = \frac{t}{n} = \frac{9}{90} = 0,1.$$

Nəhayət, (10) düsturundan istifadə edərək alırıq:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6.$$

Beləliklə,

$$P(A+B) = 0,6.$$

Deməli, təsadüfi söylənən ikirəqəmli ədədin ya 2-yə, ya 5-ə, ya da bu ədədlərin hər ikisinə eyni vaxtda bölünməsi ehtimalı $P=0,6$ -ya bərabərdir.

3. Asılı və asılı olmayan hadisələr. Şərti ehtimal.

Müşahidələr göstərir ki, bəzi hallarda hər hansı hadisənin baş verməsi başqa bir hadisənin baş vermə ehtimalına heç cür təsir etmir. Eyni zamanda bir sıra digər hallarda isə əksinə, müəyyən hadisənin baş verməsi başqa bir hadisənin baş vermə ehtimalını ciddi şəkildə dəyişdirir. Bir hadisənin baş verməsi başqa bir hadisənin baş vermə ehtimalını dəyişmirsə, belə hadisələrə *asılı olmayan* hadisələr deyilir.

Məsələn, tutaq ki, bir qutuda 10 kürəcik var və bunlardan 5-i ağdır. İkinci qutuda isə 12 kürəcik var və bunların da 8-i ağdır. Birinci qutudan təsadüfi çıxarılan kürəciyin ağ olması hadisəsi A, ikinci qutudan təsadüfi çıxarılan kürəciyin ağ olması hadisəsi isə B olsun.

Bu şərtlər daxilində A və B hadisələri bir-birindən asılı olmayan hadisələrdir. Ona görə də

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad \text{və} \quad P(B) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Daha bir misal. Tutaq ki, iki zər atılır. Birinci zər atılarkən müəyyən bir üzünün düşməsi hadisəsini A ilə, ikinci zər atıldıqda da hər hansı üzünün düşməsi hadisəsini B ilə işarə edək. Yenə də A və B hadisələri asılı deyillər. Ona

görə də bu hadisələrin baş vermə ehtimalları aşağıdakı kimi olur:

$$P(A) = \frac{1}{6} \text{ və } P(B) = \frac{1}{6}.$$

Bir hadisənin baş verməsi başqa bir hadisənin baş vermə ehtimalını dəyişərsə, belə hadisələrə *asılı* hadisələr deyilir.

Məsələn, qutuda $n=10$ kürəcik var və bunlardan $m=6$ dənəsi ağdır. Qutudan bir kürəcik çıxarılır. Çıxarılan kürəciyin ağ olması hadisəsi A olsun.

Aydındır ki, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ olur. Qeyd olunan nəticədən sonra ağ kürəcik qutuya qaytarılır. Bundan sonra qutudan ikinci dəfə daha bir kürəcik çıxarılır. İkinci dəfə çıxarılan kürəciyin ağ olması hadisəsi B olsun. Aydındır ki, həm də $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ olacaq. Bu halda A və B hadisələri asılı deyillər, belə ki, ikinci çıxarılan kürəciyin ağ rəngli olması ehtimalı ondan əvvəl hansı kürəciyin (ağ rəngli və ya başqa) çıxmasından asılı deyildir.

Bu misalda belə bir dəyişiklik edək. Tutaq ki, birinci kürəcik çıxarılır, lakin yenidən qutuya qaytarılmır. Bununla da qutudakı kürəciklərin ümumi sayı dəyişir (azalır). Deməli, ikinci dəfə qutudan ağ kürəciyin çıxarılmasının, yəni B hadisəsinin baş verməsinin şərtləri dəyişdirilmiş olur. Daha doğrusu, qutudakı kürəciklərin ümumi sayı artıq $n=10$ deyil, $n=9$ olur. Həm də qutudan çıxarılan kürəciyin ağ olması hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı qutuya qaytarılmayan kürəciyin rəngindən asılı olur. Belə ki, həmin kürəcik ağ rəngli olduqda qutudan ikinci dəfə ağ rəngli kürəciyin çıxması üçün əlverişli nəticələrin sayı $m=6-1=5$ və bütün mümkün nəticələrin sayı isə $n=10-1=9$ olur. Yəni bu

halda $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{5}{9}$ alınır. Əgər qutuya qaytarılmayan kürəcik ağ rəngli olmazsa, onda ikinci dəfə qutudan çıxarılaçaq kürəciyin ağ rəngli olması üçün əlverişli nəticələrin sayı $m=6$ olur və bütün mümkün nəticələrin sayı isə əvvəlki kimi $n=9$ olur. Nəticədə isə alırıq: $P(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Bu baxdığımız misalda təsvir edilən yeni şərtlər daxilində A hadisəsinin baş verməsi B hadisəsinin baş verməsinə təsir etdiyindən A və B hadisələri artıq *asılı* hadisələrdir. Belə ki, A hadisəsi baş verərkən $P(B)$ -nin hesablanmış qiyməti, A hadisəsi baş vermədikdə $P(B)$ -nin qiymətindən fərqli olur. Beləliklə də B hadisəsinin baş verməsi ehtimalı şərti xarakter daşıyır və elə buna görə də *şərti ehtimal* adlanır.

Daha bir misal. Bir qutuda 6 dənə qırmızı və 5 dənə qara kürəcik var. Bu qutudan daldadal iki kürəcik çıxarılır.

Tutaq ki, A hadisəsi qırmızı kürəciyin qutudan birinci cəhddə çıxarılması, B hadisəsi isə qırmızı kürəciyin qutudan ikinci cəhddə çıxarılması hadisəsidir. Aydındır ki, A hadisəsinin baş verməsi ehtimalı $P(A) = \frac{6}{11}$ olur. Lakin B

hadisəsindən əvvəl A hadisəsi baş verdikdə, qutudakı ümumi kürəciklərin və eləcə də qırmızı kürəciklərin sayı 1 vahid azalır ($n=11-1=10$ və $m=6-1=5$). Ona görə də A hadisəsinin baş verməsi şərtilə B hadisəsinin baş verməsi ehtimalı

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

olur.

A hadisəsinin baş verməsi şərti ilə B hadisəsinin şərti ehtimalı $P(B/A)$ və ya $P_A(B)$ şəklində yazılır. Deməli, baxılan misallarda hesablanmış şərti ehtimalları belə yazırıq:

$$P(B/A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{9},$$

$$P(B/A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

$$P(B/A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Beləliklə, bir çox hallarda hadisələrdən birinin baş verməsi şərti ilə digərinin baş vermə ehtimalını tapmaq lazım gəlir. Belə ehtimallar şərti ehtimal adlanır.

M ə s ə l ə 6. Bir zər atılır. Bu zaman düşən xalın tək ədəd olması şərti ilə 5 xal düşməsinin şərti ehtimalını tapın.

H ə l l i. Zər bir dəfə atılarkən düşən xalın tək ədəd olması hadisəsi A , 5 xal düşməsi hadisəsi isə B olsun. Aydındır ki, zərin 6 üzü olduğundan bütün mümkün halların sayı $n=6$ olur. Bütün mümkün hallar arasında B hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı $m=1$ olur. Bunun üçün də B hadisəsinin şərtsiz baş verməsi ehtimalı

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

olacaq.

Digər tərəfdən A hadisəsinin baş verməsi üçün mümkün olan halların sayı $m=3$ -dür. Yəni A hadisəsinin baş vermiş hesab etsək bu yalnız üç dəfə baş verə bilər. Bu da o deməkdir ki, yalnız 1, 3, 5 xallarının düşməsi hadisəsi qalar və qalan hallar isə aradan çıxar. Bu üç hallardan isə yalnız biri B hadisəsi üçün əlverişli nəticə ola bilər. Odur ki A hadisəsi baş vermək şərti ilə B hadisəsinin şərti ehtimalı aşağıdakı kimi olar:

$$P(B/A) = \frac{1}{3}$$

M ə s ə l ə 7. Oxu zalında ehtimal nəzəriyyəsinə aid 6 dərslik var və bunlardan üçü yeni nəşrdir. Kitabxanaçı təsadüfi olaraq iki dərslik götürür. Birinci götürülən dərsliyin yeni nəşr olması şərti ilə ikinci dərsliyin yeni nəşr olmasının şərti ehtimalını tapın.

H ə l l i. Birinci götürülmüş dərsliyin yeni nəşr olması hadisəsi A, ikinci dərsliyin yeni nəşr olması hadisəsi isə B olsun. Onda $n=6$ və $m=3$ olduğundan birinci götürülmüş dərsliyin yeni nəşr olması ehtimalı, yəni A hadisəsinin baş verməsi ehtimalı belə olar:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Birinci dərsliyin yeni nəşr olması şərti daxilində, yəni A hadisəsinin baş verməsi şərti ilə ($n=5$ və $m=2$ olur) ikinci dərsliyin yeni nəşr olması ehtimalı, yəni B hadisəsinin şərti ehtimalı aşağıdakı kimi olar:

$$P(B/A) = \frac{2}{5}.$$

M ə s ə l ə 8. 100 lotereya biletindən beşi uduşludur. Təsadüfi olaraq iki bilet seçilir. Birinci seçilmiş biletin uduşlu olması şərti ilə ikinci biletin uduşlu olmasının şərti ehtimalını tapın.

H ə l l i. Birinci seçilmiş lotereya biletinin uduşlu olması hadisəsinə A ilə, ikinci lotereya biletinin uduşlu olması hadisəsinə isə B ilə işarə edək. Onda bütün mümkün halların sayı $n=100$ və lotereya biletlərinin uduşlu olması üçün əlverişli nəticələrin sayı $m=5$ olduğundan A hadisəsinin baş verməsi ehtimalı belə olacaq:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}.$$

Digər tərəfdən, A hadisəsi baş vermiş olduqda bütün sınaqların sayı və eləcə də B hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı bir vahid azalaraq müvafiq şəkildə $n=99$ və $m=4$ olur. Ona görə də birinci seçilmiş biletin uduşlu olması (A hadisəsinin baş verməsi) şərti ilə ikinci biletin uduşlu olmasının şərti ehtimalı (B hadisəsinin şərti ehtimalı) aşağıdakı kimi olur:

$$P(B/A) = \frac{4}{99}.$$

Tutaq ki, A və B hadisələri verilib. B hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı l və AB hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı isə t olsun. Onda $\frac{t}{l}$ nisbətində, yəni AB hadisəsi üçün əlverişli nəticələr sayının B hadisəsi üçün əlverişli nəticələr sayına olan nisbətində B hadisəsi baş vermək şərti ilə A hadisəsinin *şərti ehtimalı* deyilir. Beləliklə, tərifə görə alırıq:

$$P(A/B) = \frac{t}{l}. \quad (12)$$

Bu tərifə misalla izah edək. Tutaq ki, bir oyun zəri atılır. Bu halda cüt xalın düşməsi hadisəsini B ilə, 6 xal düşməsi hadisəsini isə A ilə işarə edək. Onda B hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı $l=3$, hər iki hadisənin eyni vaxtda baş verməsi, yəni AB hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı isə $t=1$ olur. Belə olduqda isə alırıq ki, A hadisəsinin şərti ehtimalı B-nin baş verməsi şərti daxilində $\frac{1}{3}$, yəni

$$P(A/B) = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

T e o r e m 1. Tutaq ki, A və B hadisələri verilib. Onda $P(A/B)$ şərti ehtimalı üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (13)$$

İ s b a t 1. Fərz edək ki, B hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı l -dir. Eləcə də AB (və ya $A \cap B$) hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı t olsun. Bütün mümkün nəticələrin sayını isə n ilə işarə edək. Onda (12) düsturu doğrudur:

$$P(A/B) = \frac{t}{l} .$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfinin surət və məxrəcini bütün mümkün nəticələrin sayına bölsək alarıq:

$$P(A/B) = \frac{t/n}{l/n} .$$

Burada $t/n = P(AB)$ və $l/n = P(B)$ olduğunu nəzərə alsaq, (13) düsturunu alarıq.

Eyni qayda ilə A hadisəsinin baş verməsi şərti ilə B -nin şərti ehtimalı üçün aşağıdakı düsturu almaq olar:

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (14)$$

Alınan (13) və (14) düsturlarının hər biri *şərti ehtimal* düsturu adlanır.

Beləliklə, $P(A/B)$ *şərti ehtimalı*, yəni B hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində A hadisəsinin başvermə ehtimalı A və B hadisələrinin birgə başvermə ehtimallarının B hadisəsinin başvermə ehtimalına olan nisbətində bərabərdir.

Eləcə də $P(B/A)$ *şərti ehtimalı*, yəni A hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində B hadisəsinin başvermə ehtimalı

A və B hadisələrinin birgə başvermə ehtimallarının A hadisəsinin başvermə ehtimalına olan nisbətində bərabərdir.

4. Ehtimalların vurulması. Tutaq ki, A və B hadisələri verilib. Bu hadisələrin eyni vaxtda baş verməsi ehtimalının nəyə bərabər olduğunu müəyyən edək. Başqa sözlə, AB və ya $A \cap B$ hadisəsinin baş verməsi ehtimalını tapaq.

T e o r e m 1. İxtiyari iki A və B hadisələrinin hasilinin (və ya birlikdə baş verməsinin) ehtimalı, A-nın ehtimalı ilə A hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində B hadisəsinin şərti ehtimalı hasilinə bərabərdir.

Və ya İxtiyari iki hadisənin hasilinin ehtimalı bunlardan birinin ehtimalı ilə birincinin baş verməsi şərti daxilində digərinin şərti ehtimalı hasilinə bərabərdir.

İ s b a t 1. Bu teoremin isbatı bilavasitə (13) və (14) düsturlarından alınır. Belə ki, teoremin isbatı üçün həmin düsturları aşağıdakı şəkildə yazmaq kifayətdir:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A), \quad (15)$$

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) \quad (16)$$

Və ya

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (17)$$

Bu teorem 2 *hasil teoremi* adlanır.

Şərti ehtimal anlayışından istifadə edərək iki hadisənin asılı olması anlayışına bir daha baxaq.

T ə r i f. Əgər B hadisəsinin baş verməsi şərti ilə, A hadisəsinin şərti ehtimalı A-nın şərtsiz ehtimalına bərabər olarsa, yəni

$$P(A/B) = P(A)$$

olarsa, onda A hadisəsinə B hadisəsindən asılı olmayan hadisə deyilir.

Əks halda isə

$$P(A/B) \neq P(A)$$

olarsa, onda A hadisəsinə B hadisəsindən asılı olan hadisə deyilir.

Yuxarıdakı teoremdə alınan (17) düsturundan çıxır ki, əgər A hadisəsi B hadisəsindən asılı deyildirsə, onda B hadisəsi də A hadisəsindən asılı deyildir. Beləliklə, hadisələrin asılı olmaması xassəsi qarşılıqlıdır.

M ə s ə l ə 9. Domino oyununda bir daş götürülür və bu daş oyuna qaytarılmır. Bu cəhddə götürülən daşdakı xal qoşa deyil. İkinci cəhddə qoşa xalın çıxması ehtimalını tapın.

H ə l l i. Hadisələri işarələyək:

A hadisəsi – birinci cəhddə təsadüfi götürülən domino daşındakı xal qoşa deyil; B hadisəsi – ikinci dəfə götürülən domino daşındakı xal qoşadır.

Aydındır ki, birinci sınaqdan sonra oyundakı domino daşlarının ümumi sayı bir dənə azalaraq $n=27$ olur. Eyni zamanda məlumdur ki, domino daşları arasında bütün qoşa xallı daşların sayı $m=7$ -dir. Ona görə də axtarılan şərti ehtimal belə olur:

$$P(B/A) = \frac{7}{27}.$$

M ə s ə l ə 10. Bir qutuda 2 qırmızı və 3 qara karandaş var. Qutudan təsadüfi olaraq iki karandaş götürülərsə, bu karandaşların hər ikisinin qırmızı olması ehtimalını tapın.

H ə l l i. Əvvəlcə hadisələri işarələyək:

A hadisəsi - qutudan çıxarılan karandaşların hər ikisi qırmızıdır;

B hadisəsi - qutudan çıxarılan karandaşların birincisi qırmızıdır;

C hadisəsi - qutudan çıxarılan karandaşların ikincisi qırmızıdır.

Məsələnin şərtindən görünür ki, B və C hadisələri asılı hadisələrdir. Belə ki, B hadisəsi baş vermiş olarsa, bu halda C hadisəsinin baş vermə ehtimalı azalır. Çünki, bu zaman C hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı və eləcə də ümumi nəticələrin sayı bir vahid azalır.

Beləliklə, karandaşların ümumi sayı $n=5$ və B hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı $m=2$ olduğundan, həm də B və C hadisələri asılı hadisələr olduğundan müvafiq ehtimallar aşağıdakı kimi hesablanır:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{2}{5}, \quad P(C/B) = \frac{m-1}{n-1} = \frac{1}{4}.$$

Deməli, qutudan çıxarılan karandaşların hər ikisinin qırmızı olması ehtimalı belə olacaq:

$$P(A) = P(B) \cdot P(C/B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

M ə s ə l ə 11. Universitetlərarası şahmat yarışlarında ADU-nu 8 nəfər oğlan və 4 nəfər qız tələbə təmsil edir. Müxtəlif qruplardan olan bu tələbələrə qrup nömrələrinə görə təsadüfi olaraq 2 nəfər seçilir. Seçilmiş tələbələrin hər ikisinin oğlan olması ehtimalını tapın.

H ə l l i. Əvvəlcə hadisələri işarələyək:

A hadisəsi - birinci seçilən şahmatçı oğlandır;

B hadisəsi – ikinci seçilən şahmatçı oğlandır.

Komandada cəmi $n=12$ nəfər şahmatçı var. Ona görə də A hadisəsi üçün əlverişli nəticələrin sayı $m=8$ olduğundan birinci seçilən şahmatçının oğlan olması ehtimalı

$$P(A) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

olur. Aydındır ki, A hadisəsi baş verdikdən sonra şahmatçıların ümumi sayı və eləcə də onların arasında olan oğlanların sayı 1 nəfər azalaraq müvafiq şəkildə $n=11$ və

$m=7$ olur. Deməli, birinci seçilən şahmatçının oğlan olması şərti ilə ikinci seçilənin də oğlan olması ehtimalı, yəni B hadisəsinin şərti ehtimalı aşağıdakı kimidir:

$$P(B/A) = \frac{7}{11}$$

Beləliklə, seçilən şahmatçıların hər ikisinin oğlan olması ehtimalı

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33} \text{ olur.}$$

M ə s ə l ə 12. Zavodda istehsal olunan kərpiclərin 92% -i yararlı, hesab edilir. Yararlı kərpiclərin isə 75% -i əla növ olur. Zavodda istehsal olunan kərpiclərin əla növ olması ehtimalını tapın.

H ə l l i. İstehsal olunan kərpicin yararlı olması hadisəsi A, əla növ olması hadisəsi isə B olsun. Nəzərə almalıyıq ki, məhsulun əla keyfiyyətli olması üçün, o əvvəlcə yararlı olmalıdır. Məsələnin şərtinə görə istehsal olunan kərpicin yararlı olması ehtimalı $P(A)=0,92$ və əla növ olması ehtimalı, yəni B hadisəsinin A-nın baş verməsi şərti daxilində baş vermə ehtimalı $P(B/A) = 0,75$ olur. Ona görə də A və B hadisələrinin eyni vaxtda baş verməsi ehtimalı

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = 0,92 \cdot 0,75 = 0,69$$

olur.

M ə s ə l ə 13. Domino oyununda ardıcıl iki cəhd edilərək hər dəfə bir daş götürülür və bu daşlar oyuna qaytarılır. Birinci cəhddə götürülən domino daşında qoşa xalın olmaması, ikinci cəhddə isə qoşa xal olması ehtimalını tapın.

H ə l l i. Birinci cəhd zamanı çıxarılan domino daşında qoşa xalın olmaması hadisəsini A ilə, ikinci cəhddə çıxarılan daşda isə qoşa xalın olması hadisəsini B ilə işarə edək.

Yuxarıdakı məsələdə gördük ki, birinci sınaqdan sonra oyundakı domino daşlarının ümumi sayı bir vahid azalaraq $n=27$ olur. Həm də məlumdur ki, domino daşları arasında bütün qoşa xallı daşların sayı $m=7$ -dir. Ona görə də B hadisəsinin şərti ehtimalı

$$P(B/A) = \frac{7}{27}$$

olur.

Digər tərəfdən məlumdur ki, birinci sınaq başlayana qədər domino daşlarının ümumi sayı $n=28$ olur. Həmçinin bunların arasında qoşa xallar olmayan daşların sayı $m=21$ -dir. Ona görə də A hadisəsinin baş verməsi ehtimalı aşağıdakı kimi olur:

$$P(A) = \frac{21}{28}.$$

Buradan isə alırıq ki, A və B hadisələrinin eyni vaxtda baş verməsi ehtimalı

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{21}{28} \cdot \frac{7}{27} = \frac{7}{36} \approx 0,2$$

olur.

T e o r e m 2. İki asılı olmayan hadisənin hasilinin ehtimalı bu hadisələrin ehtimalları hasilinə bərabərdir:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (18)$$

İ s b a t 1. Yuxarıda isbat edilmiş teoremə əsasən istənilən iki A və B hadisələrinin birgə baş verməsi ehtimalı

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B) \quad (19)$$

düsturu ilə hesablanır. A və B hadisələri asılı olmayan hadisələr olduğundan A hadisəsinin baş verməsi B-nin baş vermə ehtimalını dəyişmir. Yəni A və B asılı hadisələr deyildirsə, onda B-nin baş verməsi şərti daxilində A-nın şərti ehtimalı A hadisəsinin şərtsiz ehtimalına bərabər olur, yəni

$$P(A/B) = P(A). \quad (20)$$

Eləcə də A və B asılı olmadıqda A-nın baş verməsi şərti daxilində B-nin şərti ehtimalı B hadisəsinin şərtsiz ehtimalına bərabər olur, yəni

$$P(B/A) = P(B). \quad (21)$$

Beləliklə, (20) və (21) –i (19)-da nəzərə alsaq (19) düsturu aşağıdakı şəkllə düşər:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Teorem isbat olundu.

Bu teoremi istənilən sonlu sayda hadisələr üçün ümumiləşdirmək olar.

T ə r i f. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ ($m > 2$) hadisələrinin hər hansı biri qalan hadisələrin hasilləri ilə qarşılıqlı asılı deyildirsə, onda bunlara birgə asılı olmayan hadisələr deyilir.

T e o r e m 3. İstənilən birgə asılı olmayan sonlu sayda hadisələrin hasilinin (eyni vaxtda baş verməsinin) ehtimalı həmin hadisələrin ehtimalları hasilinə bərabərdir:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_m) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdots P(A_m).$$

I s b a t 1. Teoremi üç hadisə üçün isbat edək. Tutaq ki, A, B, C hadisələri ixtiyari birgə asılı olmayan hadisələrdir. Onda

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \quad (22)$$

olduğunu göstərək.

Bunun üçün əvvəlcə $BC = D$ qəbul edək. Buradan A və D hadisələri asılı olmadığı üçün teorem 3-ə görə yazıla bilər

$$P(ABC) = P(AD) = P(A) \cdot P(D). \quad (23)$$

Lakin B və C hadisələri də asılı deyillər. Buna görə də $P(D)$ -nin $P(D) = P(BC) = P(B) \cdot P(C)$ qiymətini (23)-də yerinə yazsaq aşağıdakı düsturu alarıq:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Teorem isbat olundu.

Riyazi induksiya üsulundan istifadə edərək bu teoremi istənilən sonlu sayda birgə asılı olmayan hadisələr üçün də isbat etmək olar.

N ə t i c ə. Bir neçə asılı hadisələrin birgə baş verməsi ehtimalı (və ya hasili) onlardan birinin ehtimalının qalan hadisələrin şərti ehtimalları hasilinə bərabərdir, belə ki, hər sonrakı hadisənin ehtimalı özündən əvvəlki bütün hadisələrin baş verməsi şərti daxilində hesablanır.

Məsələn, asılı olan A, B, C, D hadisələrinin birgə baş verməsi ehtimalını aşağıdakı düsturla hesablamaq olar:

$$P(ABCD)=P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB) \cdot P(D/ABC), \quad (24)$$

burada $P(B/A)$ ehtimalı A hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində B hadisəsinin ehtimalı (şərti ehtimalı), $P(C/AB)$ ehtimalı A və B hadisələrinin baş verməsi şərti daxilində C hadisəsinin ehtimalı (şərti ehtimalı) və nəhayət, $P(D/ABC)$ ehtimalı isə A, B, C, hadisələrinin baş verməsi şərti daxilində D hadisəsinin ehtimalıdır (şərti ehtimalıdır).

M ə s ə l ə 14. İki atıcı bir-birindən asılı olmadan eyni bir hədəfi nişan alır. Birinci atıcının hədəfi vurma ehtimalı 0,8 və ikincininki isə 0,7-dir. Hədəfin birinci və ya ikinci atıcı tərəfindən vurulması, ya da hər iki atıcı tərəfindən eyni vaxtda vurulması ehtimalını tapın.

H ə l l i. Birinci atıcının hədəfi vurma hadisəsi A, ikinci atıcının hədəfi vurma hadisəsi isə B olsun. Aydındır ki, bu hadisələr uyuşan hadisələrdir, çünki bir cəhd nəticəsində hər iki atıcı hədəfi vura bilər. Deməli, $A+B$ hadisəsi o deməkdir ki, hədəf ya birinci, ya ikinci, ya da hər iki atıcı tərəfindən, yəni heç olmasa atıcıların biri tərəfindən vurulur. Ona görə də A hadisəsinin ehtimalı 0,8 və B hadisəsinin ehtimalı isə 0,7 olduğu üçün hədəfin birinci və ya ikinci atıcı tərəfindən vurulması ehtimalı (10) düsturu ilə

$$P(A+B)=P(A)+P(B) - P(AB)$$

tapılmalıdır. Digər tərəfdən, A və B hadisələri asılı olmadığından bu düsturda $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ olduğunu nəzərə alaraq hədəfin birinci və ya ikinci atıcı tərəfindən vurulması ehtimalını aşağıdakı kimi hesablayırıq:

$$P(A+B)=P(A)+P(B) - P(A) \cdot P(B) = \\ =0,8+0,7 - 0,8 \cdot 0,7= 1,5 - 0,56 =0,94.$$

Deməli, hədəfi birinci və ya ikinci atıcının ya da onların hər ikisinin eyni vaxtda vurması ehtimalı $P=0,94$ olur.

M ə s ə l ə 15. İki atıcı bir-birindən asılı olmadan eyni bir hədəfi nişan alır və hərəsi bir dəfə atəş açır. Birinci atıcının hədəfi vurma ehtimalı 0,6 və ikincininki isə 0,7-dir. Hər iki atıcının hədəfi vurma ehtimalını tapın.

H ə l l i. Birinci atıcının hədəfi vurma hadisəsi A, ikinci atıcının hədəfi vurma hadisəsi isə B olsun. Məsələnin şərtinə görə bu hadisələr bir-birindən asılı deyillər. Ona görə də hər iki atıcının hədəfi vurma ehtimalı aşağıdakı kimi tapılır:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)=0,6 \cdot 0,7=0,42$$

M ə s ə l ə 16. Torbada 11 kürəcik var. Bunların 4-ü qırmızı və 7-si ağdır. Aşağıdakı şərtlər daxilində torbadan iki dəfə dalbadal çıxarılan kürəciyin qırmızı olması ehtimalını tapın:

- a) çıxarılan kürəcik torbaya qaytarılır;
- b) çıxarılan kürəcik torbaya qaytarılmır.

H ə l l i. Torbadan çıxarılan birinci kürəciyin qırmızı olması hadisəsini A ilə, ikinci kürəciyin qırmızı olması hadisəsini isə B ilə işarə edək.

a) Torbadan çıxarılan kürəcik torbaya qaytarılır. Onda baxılan hadisələr asılı deyillər. Odur ki, torbadakı bütün kürəciklərin sayı $n=11$, qırmızı kürəciklərin sayı $m=4$ olduğu üçün müvafiq hadisələrin ehtimalları aşağıdakı kimi tapılır:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{11}, \quad P(B) = \frac{m}{n} = \frac{4}{11}.$$

Baxılan hadisələr asılı olmadığından torbadan dalbadal çıxarılan iki kürəciyin hər ikisinin qırmızı olması ehtimalı aşağıdakı kimi hesablanır:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{11} = \frac{16}{121}$$

$$\text{Deməli, } P(AB) = \frac{16}{121} \text{ olur.}$$

b) Torbadan çıxarılan kürəcik torbaya qaytarılmır. Yəni bu halda torbadakı ümumi kürəciklərin sayı bir vahid azalır və həm də A hadisəsi baş vermiş olarsa, onda qırmızı kürəciyin sayı da bir vahid azalır. Ona görə də B hadisəsinin baş vermə ehtimalı A hadisəsinin baş verməsindən asılı olur. Deməli, bu halda A hadisəsi baş verdikdən sonra $n=10$ və $m=3$ olur. Odur ki, əvvəlcə A hadisəsinin baş verməsi ehtimalını və B hadisəsinin isə şərti (A-dan asılı olan) ehtimalını tapaq:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{11}, \quad P(B/A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{10}.$$

Bundan sonra axtarılan ehtimalı aşağıdakı kimi hesablaya bilərik:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{55}.$$

$$\text{Deməli, } P(AB) = \frac{6}{55} \text{ olur.}$$

Bu məsələdə verilən eyni şərtlər daxilində eyni qayda ilə torbadan iki dəfə dalbadal ağ şarın çıxarılması ehtimalını tapmaq olar.

M ə s ə l ə 17. Qutuda 5 ağ və 3 qara kürəcik var. Qutudan dalbadal oalraq çıxarılmış 3 kürəciyin hər birinin ağ olması ehtimalını tapın.

H ə l l i. Torbadan birinci çıxarılan kürəciyin ağ olması hadisəsini A, ikinci çıxarılan kürəciyin ağ olması hadisəsini B və üçüncü çıxarılan kürəciyin ağ olması hadisəsini isə C ilə işarə edək. Qutudakı kürəciklərin ümumi sayı $n=8$, ağ kürəciklərin sayı isə 5-ə bərabərdir. Digər tərəfdən, A hadisəsi baş verdikdə həm kürəciklərin ümumi sayı, həm də ağ kürəciklərin sayı bir vahid azalacaq və müvafiq olaraq 7-yə və 4-ə bərabər olacaq. Eyni zamanda bunun ardınca B hadisəsi də baş verərsə, bu zaman kürəciklərin ümumi sayı və eləcə də ağ kürəciklərin sayı daha bir vahid azalmaqla müvafiq olaraq 6-ya və 3-ə bərabər olacaq. Onda A, B və C hadisələrinin baş vermə ehtimallarını aşağıdakı kimi hesablamaq olar:

$$P(A)=\frac{5}{8}, \quad P(B/A)=\frac{4}{7}, \quad P(C/AB)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Burada $P(B/A)$ şərti ehtimaldır, yəni B hadisəsinin A-nın baş verməsi şərtilə başvermə ehtimalını göstərir. Eləcə də $P(C/AB)$ şərti ehtimaldır və C hadisəsinin AB-nin baş verməsi şərtilə başvermə ehtimalını göstərir.

Odur ki, ehtimalların hasili düsturundan istifadə edərək yaza bilərik:

$$P(ABC)=P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB)=\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2}=\frac{5}{28}.$$

Beləliklə, qutudan təsadüfi olaraq çıxarılan üç kürəciyin ağ olması ehtimalı

$$P(ABC)=\frac{5}{28} \text{ olacaq.}$$

M ə s ə l ə 18. Bir fəhlə sexdə üç dəzgahın işinə nəzarət edir. Bir saat ərzində birinci dəzgahın dayanma

ehtimalı 0,2-yə, ikinci dəzgahın dayanma ehtimalı 0,15-ə və üçüncü dəzgahın dayanma ehtimalı isə 0,12-yə bərabərdir. Bir saat ərzində hər üç dəzgahın fasiləsiz işləməsi ehtimalını tapın.

H ə l l i. Birinci dəzgahın bir saat ərzində fasiləsiz işləməsi hadisəsi A, ikinci dəzgahın bir saat ərzində fasiləsiz işləməsi hadisəsi B və üçüncü dəzgahın bir saat ərzində fasiləsiz işləməsi hadisəsi isə C olsun.

Aydındır ki, dəzgahın fasiləsiz işləməsi hadisəsi onun dayanmalarla işləməsi hadisəsinin qarşılıqlı əksidir. Digər tərəfdən məlumdur ki, qarşılıqlı əks hadisələrin ehtimalları cəmi vahidə bərabərdir. Yəni A hadisəsi ilə onunla qarşılıqlı əks olan $\bar{A}$ hadisənin ehtimalı arasında aşağıdakı münasibət ödəyir:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad (*)$$

Şərtə görə $P(\bar{A}) = 0,2$, $P(\bar{B}) = 0,15$ və $P(\bar{C}) = 0,12$. Ona görə də (*) münasibətinə əsasən hər bir dəzgahın ayrı-ayrılıqda fasiləsiz işləməsi ehtimalı aşağıdakı kimi tapılır:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,2 = 0,8;$$

$$P(Q) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0,15 = 0,85;$$

$$P(E) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0,12 = 0,88.$$

Eyni zamanda dəzgahların hər birinin işi digər dəzgahın işindən asılı olmadığı üçün ehtimalların hasili teoremdən istifadə edərək alırıq:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,8 \cdot 0,85 \cdot 0,88 = 0,5984.$$

M ə s ə l ə 19. Tələbə proqram üzrə 25 sualdan 20-ni bilir. İmtahan götürən müəllim tərəfindən tələbəyə verilən 3 sualı tələbənin bilməsi ehtimalını tapın.

H ə l l i. Tələbənin birinci sualı bilməsi hadisəsi A, ikinci sualı bilməsi hadisəsi B və üçüncü sualı bilməsi

hadisəsi isə C olsun. Aydındır ki, bütün sualların sayı $n=25$ və əlverişli sualların sayı isə $m=20$ -yə bərabərdir. Onda A,B,C hadisələrinin müvafiq baş vermə ehtimallarını tapaq:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} ;$$

$$P(B/A) = \frac{m-1}{n-1} = \frac{19}{24} ;$$

$$P(C/AB) = \frac{m-2}{n-2} = \frac{18}{23} .$$

Bundan sonra ehtimalların hasili düsturundan (24) istifadə etməklə axtarılan ehtimalı aşağıdakı kimi tapırıq:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB) = \frac{4}{5} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115} = 0,496.$$

M ə s ə l ə 20. Bir qrupda təhsil alan 24 nəfər tələbədən 8 nəfəri hərbi xidmətdə olmuş, 16 nəfər isə hələ hərbi xidmət keçməmişdir. Jurnal nömrəsinə görə təsadüfi olaraq 3 nəfər seçilir. Seçilmiş tələbələrin hamısının hərbi xidmətdə olması ehtimalını tapın.

H ə l l i. Birinci seçilən tələbənin hərbi xidmətdə olması hadisəsi A, ikinci seçilən tələbənin hərbi xidmətdə olması hadisəsi B və nəhayət, üçüncü seçilən tələbənin hərbi xidmətdə olması hadisəsi C olsun.

Birinci seçilən tələbənin hərbi xidmətdə olması ehtimalı $P(A) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ olur.

Birinci seçilən tələbənin hərbi xidmətdə olması şərti ilə ikinci seçilənin hərbi xidmətdə olması ehtimalı, yəni B hadisəsinin şərti ehtimalı $P(B/A) = \frac{7}{23}$ olur.

Seçilən tələbələrdən ikisinin hərbi xidmətdə olması şərti ilə üçüncü tələbənin hərbi xidmətdə olması ehtimalı,

yəni C hadisəsinin şərti ehtimalı $P(C/AB) = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$ olur.

Onda (24) düsturu vasitəsilə seçilən tələbələrin üçünün də hərbi xidmətdə olması ehtimalı aşağıdakı kimi tapılır:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{23} \cdot \frac{3}{11} = \frac{7}{253}.$$

§2.5. Tam ehtimal düsturu

Tutaq ki, $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələri cüt-cüt uyuşmayan (istənilən ikisi eyni vaxtda baş verməyən) hadisələrdir. Həm də B hadisəsi yalnız və yalnız bunlardan biri ilə birlikdə baş verir. Bu isə o deməkdir ki, B hadisəsi uyuşmayan $A_1B, A_2B, \dots, A_nB$ hadisələrindən yalnız biri baş verdikdə baş verir. Başqa sözlə, B hadisəsi $A_1B, A_2B, \dots, A_nB$ kimi xüsusi hallara ayrılır: $B = A_1B + A_2B + \dots + A_nB$.

B hadisəsinin ehtimalını tapaq.

Onda ehtimalların toplanma teoreminə görə alarıq:

$$P(B) = P(A_1B) + P(A_2B) + \dots + P(A_nB). \quad (25)$$

Burada isə hər bir toplanana ehtimalların vurulması teoremini tətbiq etsək alarıq:

$$P(A_1B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1)$$

$$P(A_2B) = P(A_2) \cdot P(B/A_2)$$

.....

$$P(A_nB) = P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Alınan ifadələri (25)-də nəzərə alaq:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n) \quad (26)$$

və ya

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B/A_i) \quad (26_1)$$

Bu düstur tam *ehtimal düsturu* adlanır.

Beləliklə, yalnız birinin baş verməsi mümkün olan (yəni tam qrup təşkil edən) cüt-cüt uyuşmayan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrindən ancaq biri ilə eyni vaxtda baş verən B hadisəsinin ehtimalı bu hadisələrin ehtimalları ilə B hadisəsinin şərti ehtimallarının hasilləri cəminə bərabərdir.

M ə s ə l ə 1. Üç sexdə cəmi 50 detal hazırlandı. Bunlardan 18-i birinci, 20-si ikinci və qalanları isə üçüncü sexdə hazırlandı. Birinci və üçüncü sexin əla keyfiyyətli məhsul buraxması ehtimalı 0,9-dur. İkinci sex üçün bu ehtimal 0,6-dır. Təsadüfi olaraq götürülən detailın əla keyfiyyətli olması ehtimalını tapın.

H ə l l i. Təsadüfi götürülmüş detailın əla keyfiyyətli olması hadisəsi B olsun. Təsadüfi götürülmüş detailın birinci, ikinci, üçüncü sexin məhsulu olması hadisəsini uyğun olaraq A_1, A_2, A_3 ilə işarə edək. Onda bu hadisələrin ehtimalları belə tapılır:

$$P(A_1) = \frac{18}{50}, \quad P(A_2) = \frac{20}{50}, \quad P(A_3) = \frac{12}{50}.$$

Məsələnin şərtinə görə A_1, A_2, A_3 hadisələrinin baş verməsi şərti daxilində B hadisəsinin şərti ehtimalları məlumdur:

$$P(B/A_1) = 0,9, \quad P(B/A_2) = 0,6, \quad P(B/A_3) = 0,9.$$

Onda tam ehtimal düsturundan istifadə edərək axtarılan ehtimalı aşağıdakı kimi tapmaq olar:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A_3) = \\ &= \frac{18}{50} \cdot 0,9 + \frac{20}{50} \cdot 0,6 + \frac{12}{50} \cdot 0,9 = \\ &= \frac{18}{50} \cdot \frac{9}{10} + \frac{20}{50} \cdot \frac{6}{10} + \frac{12}{50} \cdot \frac{9}{10} = \frac{39}{50} = 0,78. \end{aligned}$$

M ə s ə l ə 2. Bir qutuda 3 ağ və 2 qara kürəcik, ikincidə 4 ağ 1 qara kürəcik, üçüncüdə isə 2 ağ və 3 qara

kürəcik var. Qutulardan təsadüfi olaraq çıxarılan bir kürəciyin ağ olması ehtimalını tapın.

H ə l l i. Kürəciyin birinci qutudan çıxarılması hadisəsi A_1 , ikinci qutudan çıxarılması hadisəsi – A_2 , üçüncü qutudan çıxarılması hadisəsi isə – A_3 olsun. Çıxarılan kürəciyin ağ olması hadisəsini isə B ilə işarə edək.

Aydındır ki, ağ kürəcik A_1, A_2, A_3 qutularının yalnız birindən çıxacaq. Onda kürəciyin A_1 -dən çıxması şərtlə ağ olması hadisəsi BA_1 , A_2 -dən çıxması şərtlə ağ olması hadisəsi BA_2 və A_3 -dən çıxması şərtlə ağ olması hadisəsi isə BA_3 olsun. Deməli, B hadisəsi uyuşmayan BA_1, BA_2 və BA_3 hadisələrindən yalnız biri baş verdikdə baş verəcək. Yəni B hadisəsi BA_1, BA_2, BA_3 kimi xüsusi hallara ayrılır. Ona görə də tam ehtimal düsturunu aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A_3).$$

Müvafiq ehtimalları hesablayaq:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3},$$

$$P(B/A_1) = \frac{3}{5}, \quad P(B/A_2) = \frac{4}{5}, \quad P(B/A_3) = \frac{2}{5}.$$

Ehtimalların bu hesablanmış qiymətlərini tam ehtimal düsturunda nəzərə alsaq axtarılan ehtimal belə olar:

$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Beləliklə, $P(B) = 0,6$.

M ə s ə l ə 3. Maqazində üç zavodun istehsalı olan lampalar satılır. Satışda olan bütün lampaların 30%-i birinci zavodun, 50% -i ikinci zavodun və 20%-i isə üçüncü zavodun məhsuludur. Birinci zavodun buraxdığı məhsulun 5%-i, ikincinin buraxdığı məhsulun 3%-i və üçüncünün buraxdığı məhsulun isə 2%-i yararsızdır. Maqazindən

təsadüfi seçilərək alınmış bir lampanın yararsız olması ehtimalını tapın.

H ə l l i. Seçilmiş lampanın birinci, ikinci və üçüncü zavodun istehsalı olması hadisəsini uyğun olaraq B_1 , B_2 və B_3 ilə işarə edək. Məsələnin şərtindən görünür ki, B_1 hadisəsinin ehtimalı $P(B_1)=3/10$, B_2 -nin ehtimalı $P(B_2)=5/10$ və B_3 -ün ehtimalı $P(B_3) = 2/10$ -dur.

Seçilmiş lampanın yararsız olması hadisəsini A ilə işarə edək. Bu halda yararsız lampanın birinci, ikinci və üçüncü zavodun istehsalı olması hadisəsi müvafiq şəkildə A/B_1 , A/B_2 və A/B_3 olacaq. Onda məsələnin şərtinə görə B_1 , B_2 və B_3 hadisələrinin baş verməsi şərti ilə A hadisəsinin şərti ehtimalları, daha doğrusu, yararsız lampanın birinci zavodun məhsulu olması hadisəsinin ehtimalı $P(A/B_1) = 5/100$, ikinci zavodun məhsulu olması hadisəsinin ehtimalı $P(A/B_2) = 3/100$ və nəhayət, üçüncü zavodun məhsulu olması hadisəsinin ehtimalı $P(A/B_3) = 2/100$ olacaq. Deməli, tam ehtimal düsturundan istifadə edərək alırıq:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3) = \\ &= \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{100} + \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{100} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{100} = \frac{17}{500} = 0,034 . \end{aligned}$$

$$\text{Yəni } P(A) = 0,034.$$

§2.6. Bernulli düsturu

İndiyə qədər biz yalnız tək-tək aparılan sınaqlarla (təcrübələrlə) əlaqədar olan təsadüfi hadisələrə baxmışıq. Bununla yanaşı həm ehtimal nəzəriyyəsinin özü üçün və həm də praktiki nöqteyi-nəzərdən bir-birindən asılı olmayan sınaqlar ardıcılığının da öyrənilməsinin böyük əhəmiyyəti vardır.

Ehtimal nəzəriyyəsinin statistikada tətbiqləri olan mühüm qanunauyğunluqları asılı olmayan təkrar sınaqlarla, daha doğrusu aparılan sınaqlar ardıcılığı (seriyası) ilə əlaqələndirilir.

Əgər hər bir sınaq (təcrübə) zamanı A hadisəsinin baş vermə ehtimalı digər sınaqların nəticəsindən asılı deyilsə, onda həmin sınaqlar A hadisəsinə nəzərən asılı olmayan sınaqlardır.

Zərin atılmasının, hədəfə atəş açılmasının, istehsal olunmuş malın yoxlanış üçün seçilməsinin sınaqları eyni şərtlər daxilində və dəfələrlə aparılırsa, onda bu sınaqlar asılı olmayan təcrübələr ardıcılığına (seriyasına) misal ola bilər.

Belə bir məsələyə baxaq.

Tutaq ki, bir-birindən asılı olmayan n sayda sınaq keçirilir. Belə ki, hər sınaq zamanı A hadisəsi baş verə də bilər, verməyə də. Hər sınaq zamanı A hadisəsinin baş vermə ehtimalı əvvəlki sınaqların nəticələrindən asılı olmayaraq p olsun. Onda A hadisəsinin k dəfə baş verməsi ehtimalını tapaq. Bu ehtimalı $P_n(k)$ ilə işarə edək.

Aydındır ki, A hadisəsi ilə qarşılıqlı əks olan $\bar{A}$ hadisəsinin ehtimalı $q=1-p$ olacaq.

Əvvəlcə xüsusi hal üçün $n=4$ və $k=2$ qəbul edərək 4 sınaqlar ardıcılığına baxaq. Bu sınaqların hər birində A hadisəsi p ehtimalı ilə baş verir. Deməli, $P_4(2)$ ehtimalını,

yəni aparılan 4 sınaq nəticəsində A hadisəsinin 2 dəfə baş verməsi ehtimalını tapmalıyıq.

A hadisəsinin birinci sınaq zamanı baş verməsi hadisəsi A_1 , ikinci sınaq zamanı baş verməsi hadisəsi A_2 , üçüncü sınaq zamanı baş verməsi hadisəsi A_3 və nəhayət, dördüncü sınaq zamanı baş verməsi hadisəsi A_4 olsun. Onda A hadisəsinin $k=2$ dəfə baş verməsi hadisəsi aşağıdakı uyuşmayan hadisələrin cəmi şəklində göstərilə bilər:

1. $A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4$ – A hadisəsi I və II sınaqda baş verib;
2. $A_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4$ – A hadisəsi I və III sınaqda baş verib;
3. $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4$ – A hadisəsi I və IV sınaqda baş verib;
4. $\bar{A}_1A_2A_3\bar{A}_4$ – A hadisəsi II və III sınaqda baş verib;
5. $\bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4$ – A hadisəsi II və IV sınaqda baş verib;
6. $\bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4$ – A hadisəsi III və IV sınaqda baş verib.

Göründüyü kimi siyahıdakı hadisələrin sayı $C_4^2=6$ olur, çünki A hadisəsinin 4 sınaqda 2 dəfə baş verməsi üçün cəmi 6 hal mümkündür.

Bu siyahıdakı hadisələrin hər birinin ehtimalı bir-birinə bərabərdir və hasil teoreminə görə aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\begin{aligned} P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4) &= P(A_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4) = P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4) = \\ &= P(\bar{A}_1A_2A_3\bar{A}_4) = P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4) = P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4) = \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) \cdot P(\bar{A}_4) = pp(1-p)(1-p) = p^2(1-p)^2 \end{aligned}$$

Bundan sonra A hadisəsinin 4 təkrar sınaq zamanı 2 dəfə (eləcə də $\bar{A}$ hadisəsinin iki dəfə) baş vermə ehtimalını tapmaq üçün ehtimalların toplama teoremini tətbiq etmək lazımdır:

$$\begin{aligned} P_4(2) &= P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4) + P(A_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4) + P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4) + \\ &+ P(\bar{A}_1A_2A_3\bar{A}_4) + P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4) = \\ &= 6p^2(1-p)^2 = C_4^2p^2(1-p)^2. \end{aligned}$$

Ümumi halda $P_n(k)$ ehtimalının hesablanması üçün düstur analogi şəklində alınır.

Yuxarıda olduğu kimi A hadisəsinin i -ci sınaq zamanı baş verməsi hadisəsini A_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$) ilə işarə edək. Onda A hadisəsinin k dəfə baş verməsi hadisəsi aşağıdakı uyuşmayan hadisələrin cəmi şəklində olur:

$A_1 A_2 \dots A_k \bar{A}_{k+1} \dots \bar{A}_n$ – A hadisəsi birinci k sayda sınaq zamanı baş verib;

.....
 $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{n-k} A_{n-k+1} \dots A_n$ – A hadisəsi sonuncu k sayda sınaq zamanı baş verib.

Bu siyahıdakı hadisələrin sayı C_n^k -ya bərabərdir, çünki n sayda sınaq zamanı A hadisəsinin k dəfə baş verməsi üçün məhz bu qədər hal var.

Yuxarıdakı hala analogi olaraq ehtimalların hasilı teoreminə görə bu hadisələrin hər birinin ehtimalı aşağıdakı kimidir: $P^k(1-p)^{n-k}$.

Yuxarıdakı C_n^k sayda uyuşmayan hadisələrə toplama teoremini tətbiq etsək alarıq

$$P_n(k) = C_n^k P^k(1-p)^{n-k}. \quad (27)$$

Bu düstura *Bernulli düsturu* deyilir.

M ə s ə l ə 1. Hədəfə 5 atəş açılır və hər bir atəşin hədəfə dəymə ehtimalı 0,8-ə bərabərdir. Hədəfin 3 atəşlə vurulması ehtimalını tapın.

H ə l l i. Məsələnin şərtinə görə $n=5$, $k=3$ və $p=0,8$ olduğundan Bernulli düsturundan istifadə edərək tapırıq:

$$P_5(3) = C_5^3 0,8^3(1-0,8)^{5-3} = 10 \cdot 0,512 \cdot 0,2^2 = 0,2048.$$

M ə s ə l ə 2. Toxumun cücərməsi 90% -dir. Onda əkilmiş 7 toxumdan 5-nin cücərmə ehtimalını tapın.

H ə l l i. Bir toxumun cücərmə ehtimalı $p=0,9$ -a bərabərdir. Ona görə də $q=1-p=0,1$. Odur ki, Bernulli düsturundan istifadə edərək tapırıq:

$$P_7(5) = C_7^5 p^5 q^{7-5} = 21 \cdot (0,9)^5 \cdot (0,1)^2 = 0,124.$$

M ə s ə l ə 3. Zavodun buraxdığı detalların 30%-i əla növdür. Bir müştəri bu zavodda istehsal olunmuş 6 detal aldı. Bu 6 detalın 4 dənəsinin əla növ olması ehtimalını tapın.

H ə l l i. Zavodun istehsal etdiyi detalların əla növ olması ehtimalı $p=0,3$ -dür. Ona görə də $q=1-p=1-0,3=0,7$.

Odur ki, Bernulli düsturundan istifadə edərək alırıq:

$$\begin{aligned} P_6(4) &= C_6^4 p^4 q^{6-4} = 15 \cdot (0,3)^4 \cdot (0,7)^2 = \\ &= 15 \cdot 0,0081 \cdot 0,49 = 0,06. \end{aligned}$$

M ə s ə l ə 4. İstiqraz vərəqinin uduş ehtimalı 0,25-ə bərabərdir. Səidin aldığı 8 istiqraz vərəqindən 6-nın udması ehtimalını tapın.

H ə l l i. Məsələnin şərtinə görə $p=0,25$ -dir. Onda $q=1-p=0,75$ olacaq. Eyni zamanda $k=6$ -ya bərabərdir. Deməli, Bernulli düsturundan istifadə etsək alırıq:

$$\begin{aligned} P_8(6) &= C_8^6 p^6 q^{8-6} = 14 \cdot (0,25)^6 \cdot (0,75)^2 = \\ &= 14 \cdot 0,15725 \cdot 0,5625 = 0,038. \end{aligned}$$

M ə s ə l ə 5. Zavodda istehsal olunan avtomobil ehtiyat hissələrinin keyfiyyətsiz olması ehtimalı 0,05-dir. Avtomobil hissələrinin ixtiyari 4 dənəsindən heç birinin keyfiyyətsiz olmaması ehtimalını tapın.

H ə l l i. Şərtə görə $p=0,05$ olduğundan alırıq:
 $q=1-p=1-0,05=0,95$. Onda Bernulli düsturuna görə

$$P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = 1 \cdot (0,05)^0 \cdot (0,95)^4 = 0,81.$$

M ə s ə l ə 6. Maqazinə n nəfər alıcı daxil oldu. Onlardan hər birinin maqazindən mal almaq ehtimalı p olarsa, k nəfərin mal almaq ehtimalını tapın.

- | | | |
|------------|----------|--------|
| 1. $n=9,$ | $p=0,4,$ | $k=5;$ |
| 2. $n=8,$ | $p=0,3,$ | $k=3;$ |
| 3. $n=12,$ | $p=0,2,$ | $k=4;$ |
| 4. $n=10,$ | $p=0,2,$ | $k=7.$ |

H ə l l i. Birincinin həllinə baxaq.

Şərtə görə $p=0,4$ olduğu üçün $q=1-p=0,6$ olur. Digər tərəfdən $n=9$ və $k=5$ olduğundan birbaşa Bernulli düsturunu tətbiq edə bilərik:

$$P_9(5) = C_9^5 \cdot (0,4)^5 \cdot (0,6)^4 = \\ = 126 \cdot 0,01024 \cdot 0,1296 = 0,167.$$

M ə s ə l ə 7. Müşahidələr əsasında müəyyən edilmişdir ki, dağlıq rayonlarda Noyabr ayının 12 günü yağışlı olur. Həmin ay üçün təsadüfi seçilmiş 8 gündən 3-nün yağışlı olması ehtimalını tapın.

H ə l l i. Şərtə görə keçirilən sınaqların sayı $n=8$ -dir. Noyabr ayında yağış yağması hadisəsi A olsun. Onda A hadisəsinin $k=3$ dəfə baş verməsi ehtimalını tapmaq üçün Bernulli düsturundan istifadə edək:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ burada } q = 1 - p.$$

Noyabr ayı $n=30$ gündən ibarət olduğundan və şərtə görə bu aydakı yağışlı günlərin sayı $m=12$ olduğundan yağış yağması ehtimalı $p=m/n=12/30=2/5=0,4$ olar. Onda

$$q=1-p=1-2/5=0,6.$$

Deməli,

$$P_8(3) = C_8^3 p^3 q^{8-3} = \frac{8!}{3!5!} (0,4)^3 \cdot (0,6)^5 = \\ = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} 0,064 \cdot 0,07776 = 56 \cdot 0,064 \cdot 0,07776 \approx 0,28. \\ \text{Cavab: } p \approx 0,28$$

§2.7. Təsadüfi kəmiyyət və onun paylanması

Aparılan təcrübələr (sınaqlar) zamanı biz mütəmadi olaraq elə kəmiyyətlərlə qarşılaşırıq ki, onların ədədi qiymətlərini birdəfəlik təyin etmək mümkün deyildir, yəni bu qiymətlər təsadüfi təsirlər nəticəsində daim dəyişir.

Müəyyən təcrübənin nəticəsindən asılı olaraq bu və ya digər ədədi qiymətlər ala bilən kəmiyyətlərə təsadüfi kəmiyyətlər deyilir. Biz əvvəlki paraqraflarda cürbəcür təsadüfi kəmiyyətlərlə qarşılaşmışdıq. O cümlədən, məsələlərin həllində yalnız bu və ya digər ədədi qiymətlər alan müxtəlif təsadüfi kəmiyyətlərlə rastlaşmışıq. Oyun zərini atarkən biz həmişə ədədi qiyməti 1, 2, 3, 4, 5 və ya 6-ya bərabər xalın düşməsinə gözləmişik. Eləcə də bir domino daşı götürərkən ədədi qiyməti 0, 1, 2, 3, ... , 12-yə bərabər xallardan yalnız birinin düşəcəyini bilirik.

Təsadüfi kəmiyyətlərə aid çox misallar göstərmək olar:

1. Zavodda müəyyən müddət ərzində istehsal edilmiş zay məhsulun miqdarı təsadüfi kəmiyyətdir. Bu kəmiyyət müəyyən sonlu ədədi qiymət ala bilər. Məsələn, 0, 1, 2, 3, ... və s. ;
2. Bir gün ərzində şəhərdə baş vermiş yol-nəqliyyat hadisələrinin sayı təsadüfi kəmiyyətdir. Bu kəmiyyət müəyyən sonlu ədədi qiymət ala bilər. Məsələn, 0, 1, 2, 3, ... və s. ;
3. Hər hansı poçt şöbəsinə gündəlik daxil olan məktubların sayı təsadüfi kəmiyyətdir və bu kəmiyyət müəyyən sonlu ədədi qiymət ala bilər. Məsələn, 0, 1, 2, 3, ... ;

4. Atılan 5 güllədən hədəfə dəyənlərin sayı təsadüfi kəmiyyətdir və bu kəmiyyət sonlu ədədi qiymətlərdən birini ala bilər: 0, 1,...,5 ;
5. Şəhər nəqliyyatı hərəkətinin çox sıx olduğu mərkəzi küçələrin birindən bir saat ərzində keçən maşınların sayı təsadüfi kəmiyyətdir və sonlu ədədi qiymətlərdən birini ala bilər. Məsələn, 0, 1, 2, 3;
6. Şahmat turnirində heç-heçə ilə nəticələnən oyunların sayı, olimpiya oyunlarında qazanılan medalların sayı və s. təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Bu göstərilən misallarda baxılan təsadüfi kəmiyyətlər adətən bir-birindən ayrı və təcrid edilmiş qiymətlər alır. Onların mümkün qiymətlərini nömrələmək olar.

Belə təsadüfi kəmiyyətlər *diskret təsadüfi kəmiyyətlər* adlanır.

Beləliklə, bütün mümkün qiymətləri ayrıca izole edilmiş ədədlər (yəni iki qonşu qiymətlər arasında mümkün qiymətlər yoxdur) olan təsadüfi kəmiyyətə diskret təsadüfi kəmiyyət deyilir. Diskret təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri sonlu və ya sonsuz ədədi ardıcılıq ola bilər. Yəni bu qiymətlər sonlu və hesabi çoxluq təşkil edə bilər. Bu qiymətləri ala bilən təsadüfi kəmiyyətin diskret olması o deməkdir ki, istənilən x_i və x_j qiymətləri arasında bu ardıcılıqdan yalnız sonlu sayda elementlər ola bilər və zərurət yaranan halda biz bütün bu aralıq qiymətlərin hamısını yazı da bilərik.

Əgər təsadüfi kəmiyyət ədəd oxu üzərində hər hansı intervaldakı bütün həqiqi qiymətləri alırsa, bu halda *kəsilməz təsadüfi kəmiyyətdən* söhbət gedir. Belə təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri bir-birindən ayrı, təcrid edilmiş deyildir. Məsələn, eyni bir top qurğusundan açılan atəş nəticəsində

mərminin partladığı yerlə top qurğusu arasındakı məsafə təsadüfi kəmiyyətdir və müxtəlif qiymətlər alır. Yəni bu qiymətlər müəyyən interval daxilindəki bütün qiymətlər ola bilər. Məsələ burasındadır ki, belə qiymətlərdən istənilən ikisi məsələn, x_i və x_j qiymətləri arasında sonsuz sayda ədədlər var və bu ədədlərin hamısını yazmaq mümkün deyildir. Ona görə də nömrələmə prosesi sonsuz proses olur.

Beləliklə, müəyyən intervaldakı bütün həqiqi qiymətləri ala bilən təsadüfi kəmiyyətə *kəsilməz təsadüfi kəmiyyət* deyilir.

Təsadüfi kəmiyyətləri təyin etmək üçün ilk növbədə onların ala biləcəyi qiymətləri bilmək lazımdır. Lakin təsadüfi kəmiyyətlərin tam ifadə olunması üçün yalnız onların ala biləcəyi qiymətləri göstərmək kifayət deyildir. Belə ki, qiymətlər çoxluğu eyni olan, lakin bu qiymətləri müxtəlif ehtimallarla alan müxtəlif təsadüfi kəmiyyətlər də var. Odur ki, təsadüfi kəmiyyətin verilməsi üçün onun ala biləcəyi qiymətlərlə yanaşı, həm də həmin qiymətləri hansı ehtimalla aldığı göstərilməlidir. Bu o deməkdir ki, diskret təsadüfi kəmiyyəti birqiymətli təyin etmək üçün bu kəmiyyət haqqında iki məlumatın verilməsi zəruridir. Yəni təsadüfi kəmiyyətin hansı qiymətləri və hansı ehtimalla ala biləcəyi məlum olmalıdır.

Təsadüfi kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlərlə, bu qiymətlərə uyğun ehtimallar arasında əlaqə müxtəlif üsullarla verilə bilər. Bunlardan biri paylanma qanunudur.

Adətən təsadüfi kəmiyyətləri böyük və onların ala biləcəyi bütün mümkün qiymətləri isə kiçik hərflərlə işarə edirlər. Məsələn, tutaq ki, X təsadüfi kəmiyyəti hədəfə atılan üç güllədən hədəfə dəyənlərin sayını göstərir. Bu halda X təsadüfi kəmiyyətinin ala biləcəyi bütün mümkün qiymətlər $x_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3$ olar.

X təsadüfi kəmiyyətinin konkret x_i qiymətini alması təsadüfi hadisədir.

Beləliklə, bütün mümkün qiymətləri $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ olan X təsadüfi kəmiyyətinə baxaq. Aparılan hər bir sınaq nəticəsində X təsadüfi kəmiyyəti bu qiymətlərdən birini hökmən almalıdır. Yəni X təsadüfi kəmiyyətinin $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ qiymətlərindən birini hökmən alması hadisəsi baş verməlidir. Onda n sayda təsadüfi hadisələrə baxaq:

X təsadüfi kəmiyyətinin x_1 qiymətini alması hadisəsi A_1 ,

----- x_2 qiymətini alması hadisəsi A_2 ,

----- x_3 qiymətini alması hadisəsi A_3 ,

.....

----- x_n qiymətini alması hadisəsi A_n

olsun. Aydındır ki, $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrindən biri hökmən baş verməlidir. Çünki X təsadüfi kəmiyyəti $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ qiymətlərindən birini hökmən almalıdır. Onda bu hadisələrin ehtimallarını uyğun olaraq $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ ilə işarə edək. Deməli, $p(A_1)=p_1, p(A_2)=p_2, \dots, p(A_n)=p_n$ olur.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələri uyuşmayan hadisələrdir, çünki təsadüfi kəmiyyət bir sınaq nəticəsində $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ qiymətlərindən yalnız birini ala bilər. Deməli, toplama teoremindən istifadə edərək uyuşmayan hadisələr üçün alırıq: $P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)=1$,

yəni $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. (28)

Diskret təsadüfi kəmiyyətlərin mümkün qiymətləri ilə onların uyğun ehtimalları arasında əlaqə yaradan hər hansı qaydaya diskret təsadüfi kəmiyyətlərin *paylanma qanunu* deyilir. Hər bir təsadüfi kəmiyyət müəyyən paylanma qanununa tabedir. Paylanma qanunu müxtəlif üsullarla verilə bilər. Bu üsulların ən sadəsi cədvəl üsuludur. Cədvəl üsulunda təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri və bu qiymətlərə uyğun ehtimallar göstərilir. O cümlədən, X

təsadüfi kəmiyyətinin bütün mümkün qiymətləri $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ və bu qiymətlərin uyğun ehtimalları $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ olarsa, onun paylanma qanunu aşağıdakı cədvəl şəklində göstərilə bilər (cədvəl 1):

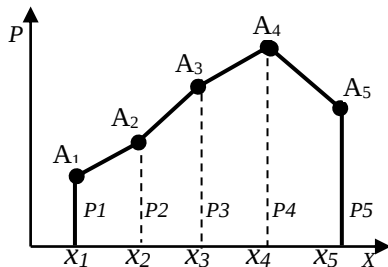
Cədvəl 1

Qiymətlər	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Ehtimallar	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Bu cədvələ təsadüfi kəmiyyətin *paylanma sırası* da deyirlər.

Cədvəlin birinci sətrində təsadüfi kəmiyyətin bütün mümkün qiymətləri, ikinci sətrində isə həmin qiymətlərin uyğun ehtimalları yazılır. Digər tərəfdən (28) şərtinə görə X təsadüfi kəmiyyətinin *paylanma qanununu* əks etdirən cədvəlin ikinci sətrində yazılmış bütün ədədlərin cəmi vahidə bərabər olmalıdır.

Paylanma sırasını daha əyani şəkildə göstərmək üçün *qrafik üsuldan* istifadə edilir. Bunun üçün koordinat sistemində təsadüfi kəmiyyətin bütün mümkün qiymətləri absis oxu üzərində, onların ehtimalları isə ordinat oxu üzərində qeyd edilir, yəni (x_i, p_i) nöqtələri qurulur. Bundan sonra isə bu nöqtələr düz xətt parçaları ilə birləşdirilir. Bu halda alınan fiqur *paylanma çoxbucaqlısı* adlanır (şəkil 5).

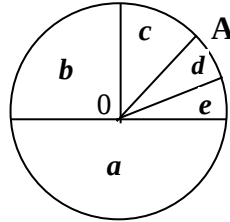


Şəkil 5.

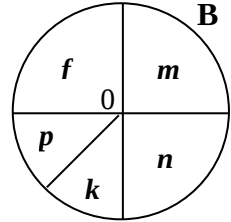
Paylanma sırası və paylanma çoxbucaqlısı təsadüfi kəmiyyəti əyani şəkildə tam təsvir etməyə imkan verir.

Məsələ. Tutaq ki, atıcılar sektorlara bölünmüş dairə şəkilli və öz oxları ətrafında fırlana bilən A (şəkil 6) və B (şəkil 7) hədəflərinə atəş açırlar. Hədəflər böyük sürətlə fırlanıqda atıcılar hədəflərin üzərindəki sektorları ayıra bilmirlər və məcburən hədəfə təsadüfi atəş açırlar. Bir atəşlə

A hədəfinin vurulması hadisəsi X və B hədəfinin vurulması hadisəsi isə Y olsun. Aydındır ki, atəş nəticəsində X hadisəsi vurulan sektorlardan asılı olaraq a, b, c, d, e



Şək.6



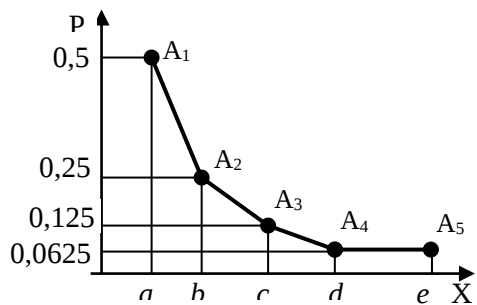
Şək. 7

qiymətlərini, Y hadisəsi isə f, m, n, k, p qiymətlərini ala bilər. Eyni zamanda X və Y hadisələri bu qiymətləri almaq ehtimalları ilə də bir-birindən fərqlənirlər. Bu o deməkdir ki, diskret təsadüfi kəmiyyəti birqiymətli təyin etmək üçün iki məlumat lazımdır. Birinci bilmək lazımdır ki, təsadüfi kəmiyyət hansı qiymətləri ala bilər və ikinci isə təsadüfi kəmiyyətin bu qiymətləri hansı ehtimalla aldığı məlum olmalıdır. Beləliklə, X-in qiymətləri və müvafiq ehtimallar uyğun cədvəl (cədvəl 2) və qrafikdə (şəkil 8) əks olunur. Bu

Cədvəl 2

X	a	b	c	d	e
Ehtimallar	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0625

qrafikə təsadüfi kəmiyyətin paylanma *poliqonu* da deyilir. Həmçinin Y təsadüfi kəmiyyətinin qiymətləri və müvafiq ehtimallar uyğun cədvəl (cədvəl 3) və qrafikdə (şəkil 9) verilir.



Şək. 8

M ə s ə l ə 1.

Tutaq ki, oyun zəri atılarkən düşən xalların sayını göstərən

təsadüfi kəmiyyət X -dir.

Paylanma qanununu tapın.

H ə l l i. Aydınır ki, zər atılarkən X təsadüfi kəmiyyəti 1, 2, 3, 4, 5, 6 qiymətlərindən birini ala bilər. Həm də X təsadüfi kəmiyyəti bu qiymətləri

$p_1=p_2=, \dots, =p_6=\frac{1}{6}$ ehtimalı ilə alır. Ona görə də paylanma

qanunu aşağıdakı kimidir (cədvəl 4):

Cədvəl 4

x_i	1	2	3	4	5	6
Ehtimallar	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

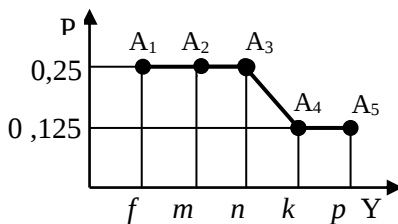
M ə s ə l ə 2. X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu cədvəl şəklində verilmişdir (cədvəl 5). Paylanma çoxbucaqlısını qurun.

H ə l l i. Düzbucaqlı koordinat sistemində absis oxu üzərində x -in qiymətlərini, ordinat oxu üzərində isə bu

qiymətlərin müvafiq ehtimallarını qeyd edərək $A_1(1;0,3)$, $A_2(3;0,1)$, $A_3(4;0,5)$, $A_4(5;0,2)$, $A_5(8;0,4)$ nöqtələrini qururuq və bu nöqtələri düz xətt parçaları ilə birləşdiririk (şəkil 10).

Cədvəl 3

Y	f	m	n	k	p
Ehtimallar	0,25	0,25	0,25	0,125	0,125



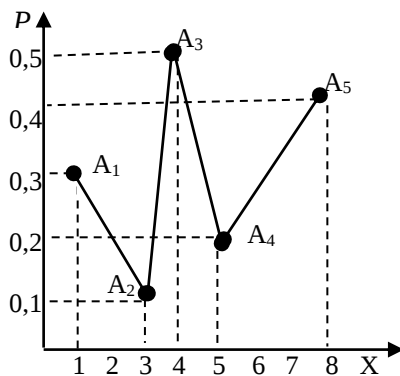
Şək. 9

Cədvəl 5

X	1	3	4	5	8
P	0,3	0,1	0,5	0,2	0,4

M ə s ə l ə 3. İdmançı basketbol topunu səbətə atır. Topun səbətə düşmə ehtimalı $1/3$ -dir. İdmançının etdiyi $n=4$ cəhdin nəticəsinə görə təsadüfi kəmiyyətin paylanma cədvəli və paylanma çoxbucaqlısını qurun.

H ə l l i. Topun səbətə düşmə hadisəsi A olsun. Tutaq ki, X təsadüfi kəmiyyəti A hadisəsinin neçə dəfə baş verdiyini göstərir. Aydındır ki, X təsadüfi kəmiyyəti 4 cəhddə topun səbətə düşməsindən asılı olaraq 0, 1, 2, 3 və ya 4 qiymətini ala bilər. Yəni X təsadüfi kəmiyyətinin



Şək. 10

mümkün qiymətləri $x_i = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olacaq. Onda Bernulli düsturuna görə topun səbətə k dəfə ($k=0, 1, 2, 3, 4$) düşmə ehtimalını, yəni $i=0, 1, 2, 3, 4$ üçün müvafiq ehtimalları hesablayaq.

$$p_1 = C_4^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^4 = 4^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \approx 0,2,$$

$$p_2 = C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{32}{81} \approx 0,4,$$

$$p_3 = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{81} \approx 0,3,$$

$$p_4 = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 4 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81} \approx 0,1,$$

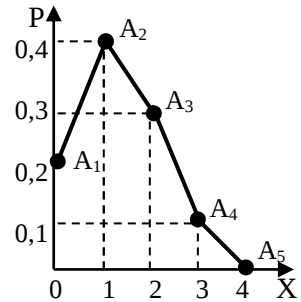
$$p_5 = C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \approx 0,0.$$

Müvafiq ehtimallar təyin edildikdən sonra paylanma cədvəlini qurmaq olar (cədvəl 6).

Cədvəl 6

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1	0,0

Nəhayət, bu paylanmaya uyğun olan qrafiki (təsadüfi kəmiyyətin ehtimalının paylanma çoxbucaqlısını) çəkmək üçün absis oxu üzərində x_i -lərin qiymətləri (A hadisəsinin baş vermə sayı – k), ordinat oxu üzərində isə onların p_i ehtimallarını qeyd etməklə düzbucaqlı koordinat sistemində uyğun nöqtələri qurmaq və onları düz xətt parçaları ilə birləşdirmək olar (şəkil 11). Daha aydın təsəvvür üçün üfüqi və şaquli oxlar üzərində miqyaslar müxtəlif götürülmüşdür.



Şəkil 11

Ehtimalın paylanmasından görünür ki, A hadisəsinin bir dəfə baş vermə ehtimalı daha böyükdür.

Ədədi qiymətlər və eləcə də qrafik göstərir ki, k -nın qiymətinin artması ilə ehtimalın qiyməti əvvəlcə artır və nəhayət, ən böyük qiymətə çatdıqdan sonra azalır.

§2.8. Təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma qanunu onların qiymətləri ilə ehtimalları arasındakı əlaqəni ifadə edir. Həm də paylanma qanunu təsadüfi kəmiyyətlərin tam xarakteristikasını verir. Lakin bəzən təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma qanunu məlum olmur və təsadüfi kəmiyyətin müəyyən ehtimal xassələrini

nisbətən az və ya daha sadə məlumatlar vasitəsilə öyrənmək lazım gəlir. O cümlədən, bir çox praktik məsələlərin həllində yalnız təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanununun ayrı-ayrı mühüm xüsusiyyətlərini əks etdirən bəzi ədədi parametrləri bilmək kifayət edir. Belə ədədləri təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları adlandırmaq qəbul edilmişdir.

Təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları onu müəyyən dəqiqliklə kəmiyyətcə xarakterizə edir. Bu ədədi xarakteristikalar təsadüfi kəmiyyət haqqındakı bəzi ehtimal məsələlərini çox zaman qısa yolla həll etməyə və həmin kəmiyyət haqqında yığcam və ətraflı məlumat almağa imkan verir.

1. Riyazi gözləmə. Təsadüfi kəmiyyətin mühüm ədədi xarakteristikalarından biri onun orta qiyməti (təsadüfi kəmiyyətin səpələnmə mərkəzi) və ya riyazi gözləməsidir.

T ə r i f. Təsadüfi kəmiyyətin bütün mümkün qiymətləri ilə bu qiymətlərin müvafiq ehtimalları hasillərinin cəminə təsadüfi kəmiyyətin *riyazi gözləməsi* deyilir.

Adətən X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini $M(X)$ -lə (və ya MX -lə) işarə edirlər.

Beləliklə, ehtimal nəzəriyyəsi və eləcə də statistikaya aid bir sıra məsələləri həll edərkən təsadüfi kəmiyyətin daha sadə xarakteristikasından, yəni onun orta qiyməti – $\bar{X}$, başqa sözlə, riyazi gözləməsindən – $M(X)$ istifadə edilir.

Diskret təsadüfi X kəmiyyətinin aldığı bütün mümkün qiymətləri $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ və bu qiymətlərin uyğun ehtimallarını $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ ilə işarə edək. Eyni zamanda X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi $M(X)$ olsun. Onda yuxarıda verilmiş tərifə əsasən alırıq:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \dots + x_np_n =$$

$$= \sum_{k=1}^n x_k p_k . \quad (29)$$

Burada $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = \sum_{k=1}^n p_k = 1.$

Riyazi gözləmə təsadüfi kəmiyyətin orta qiymətinə deyilir, çünki bu elə bir ədədi qiymətdir ki, təsadüfi kəmiyyətin bütün mümkün qiymətləri həmin bu qiymət ətrafında qruplaşmış olur. Yəni riyazi gözləmə təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin qruplaşmasının mərkəzini göstərir. Deməli, riyazi gözləmə təsadüfi kəmiyyətin orta qiymətinin xarakteristikasıdır.

Riyazi gözləmənin aşağıdakı xassələri var.

1. Sabitin riyazi gözləməsi həmin sabitin özünə bərabərdir:

$$M(C) = C.$$

2. Sabit vuruğu riyazi gözləmə işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:

$$M(CX) = CM(X).$$

3. Təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin riyazi gözləməsi toplananların riyazi gözləmələri cəminə bərabərdir:

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n).$$

4. Cüt-cüt asılı olmayan $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin hasilinin riyazi gözləməsi onların riyazi gözləmələri hasilinə bərabərdir:

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdots X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdots M(X_n).$$

M ə s ə l ə 1. Bir oyun zəri atılarkən düşən xalların sayının riyazi gözləməsini tapın.

H ə l l i. Tutaq ki, X təsadüfi kəmiyyəti zər atılarkən düşən xalların sayını göstərir. Deməli, X təsadüfi kəmiyyəti $x=1, x=2, x=3, \dots, x=6$ qiymətlərini ala bilər. Həm də X təsadüfi kəmiyyəti bu qiymətləri

$$p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_6 = \frac{1}{6} \approx 0,7$$

ehtimalı ilə alır. Odur ki, (29) düsturuna görə alırıq:

$$M(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \dots + p_6x_6 = \\ = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = 3,5.$$

M ə s ə l ə 2. Paylanma cədvəli aşağıdakı kimi olan (cədvəl 7) təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsini tapın.

Cədvəl 7

x_i	5	7	10	15
p_i	0,2	0,5	0,2	0,1

H ə l l i. Paylanma cədvəli məlum olduğundan birbaşa riyazi gözləmə düsturunu tətbiq edirik:

$$M(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 = \\ = 5 \cdot 0,2 + 7 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,2 + 15 \cdot 0,1 = 8.$$

M ə s ə l ə 3. Tələbələrin universiteti bitirmələri münasibətilə keçirdikləri gecədə buraxılmış 160 lotereya biletidən 80-i bir manatlıq, 48-i iki manatlıq, 28-i 3 manatlıq və 4-ü 5 manatlıq uduş üçün nəzərdə tutulmuşdur. Bütün uduşların verilməsinə sərf olunan ümumi məbləğin biletlərin satışından əldə olunan məbləğə bərabər olması şərti ilə bir biletin qiymətini tapın.

H ə l l i. Riyazi gözləmə düsturunu tətbiq etmək üçün əvvəlcə ayrı-ayrı uduşların miqdarı haqqında paylanma cədvəlini tərtib edək (cədvəl 8).

Cədvəl 8

x_i	1	2	3	5
p_i	$\frac{80}{160}$	$\frac{48}{160}$	$\frac{28}{160}$	$\frac{4}{160}$

Bu cədvəldə verilmiş qiymətlərdən istifadə edərək (29) düsturunun tətbiqi ilə alırıq:

$$M(X) = 1 \cdot \frac{80}{160} + 2 \cdot \frac{48}{160} + 3 \cdot \frac{28}{160} + 5 \cdot \frac{4}{160} = \\ = 0,5 + 0,6 + 0,525 + 0,125 = 1,75.$$

Beləliklə, bir biletin qiyməti 1,75 manat olmalıdır.

M ə s ə l ə 4. Hədəfə 6 dəfə atəş açılır. Hər atəşdə hədəfin vurulma ehtimalı $p=2/3$ -yə bərabərdir. Hədəfin neçə dəfə vurulmasının riyazi gözləməsini tapın.

H ə l l i. Hədəfin vurulma sayı X təsadüfi kəmiyyət olsun. Onda X təsadüfi kəmiyyətinin qiymətləri 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ola bilər. Odur ki, əvvəlcə bu qiymətlərin müvafiq ehtimallarını Bernulli düsturundan (27) istifadə edərək hesablamaq və paylanma cədvəlini qurmaq olar (cədvəl 9).

Cədvəl 9

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	$p_{6,0}$	$p_{6,1}$	$p_{6,2}$	$p_{6,3}$	$p_{6,4}$	$p_{6,5}$	$p_{6,6}$

Yəni $p_{6,i} = P_6(i) = C_6^i \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^{6-i}$, ($i=0, 1, 2, \dots, 6$) düsturundan istifadə edərək müvafiq ehtimalları hesablamaq lazımdır.

$$p_0 = p_{6,0} = C_6^0 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^{6-0} = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 1/3^6$$

$$p_1 = p_{6,1} = C_6^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^{6-1} = 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1/3^5 = 12/3^6$$

$$p_2 = p_{6,2} = C_6^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{6-2} = 15 \cdot 4/3^2 \cdot 1/3^4 = 60/3^6$$

$$p_3 = p_{6,3} = C_6^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^{6-3} = 20 \cdot 8/3^6 = 160/3^6$$

$$p_4 = p_{6,4} = C_6^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^{6-4} = 15 \cdot 16/3^6 = 240/3^6$$

$$p_5 = p_{6,5} = C_6^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^{6-5} = 6 \cdot 32/3^6 = 192/3^6$$

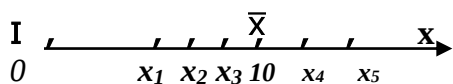
$$p_6 = p_{6,6} = C_6^6 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^{6-6} = 64/3^6$$

Nəhayət, riyazi gözləmə düsturundan istifadə edərək alırıq:

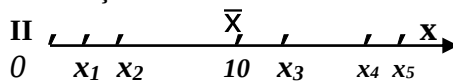
$$\begin{aligned}
 M(X) &= p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 + p_5x_5 + p_6x_6 = \\
 &= 0 \cdot 1/3^6 + 1 \cdot 12/3^6 + 2 \cdot 60/3^6 + 3 \cdot 160/3^6 + \\
 &\quad + 4 \cdot 240/3^6 + 5 \cdot 192/3^6 + 6 \cdot 64/3^6 = \\
 &= \frac{1}{729} (12 + 120 + 480 + 960 + 960 + 384) = 4.
 \end{aligned}$$

2. Dispersiya. Yalnız orta qiymət və ya riyazi gözləmə bir sıra məsələlərdə öyrənilən təsadüfi kəmiyyətin tam və hərtərəfli xarakteristikasını verə bilmir. Yəni bəzi hallarda əlavə olaraq təsadüfi kəmiyyətin ayrı-ayrı qiymətlərinin onun orta qiymətindən (mərkəzdən) nə qədər meyl etdiyini də bilmək tələb olunur. Başqa sözlə, daha bir anlayışın, yəni təsadüfi kəmiyyətin (X -in) onun orta qiymətindən ($\bar{X}$ -dən) meylinin (nə qədər fərqli olduğunun) öyrənilməsinə ehtiyac yaranır. X təsadüfi kəmiyyətinin meyli dedikdə təsadüfi kəmiyyətin qiyməti ilə onun orta qiymətinin (riyazi gözləməsinin) fərqi nəzərdə tutulur və belə işarə edilir: $X - \bar{X}$ və ya $X - M(X)$. Bu meylətmə təsadüfi kəmiyyətin səpələnməsini, yəni orta qiymət ətrafında necə yayılmasını əks etdirir. Meylətmə təsadüfi kəmiyyət olsa da səpələnmənin qiymətləndirilməsində ondan istifadə etmək əlverişli deyil, çünki onun riyazi gözləməsi həmişə sıfıra bərabər olur. Buna görə də səpələnmənin qiymətləndirilməsi üçün başqa xarakteristikalar daxil edilir.

Tutaq ki, hər birində 5 ardıcıl ölçmə olmaqla iki dəfə (I və II) hesablamalar aparılmış və nəticələr uyğun şəkillərdə verilmişdir (şəkil 12 və şəkil 13). Həm birinci və



Şəkil.12



Şəkil.13

həm də ikinci ölçmələrin nəticələri tamamilə fərqli olsalar da hər iki halda eyni orta qiymət $\bar{X} = 10$ alınmışdır. Birinci ardıcıl

ölçmələrin nəticələri ikinci nəticələrlə müqayisədə təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin az səpələndiyini və orta qiymət ətrafında daha sıx və ona daha yaxın yerləşdiyini göstərir (şəkil 12).

Hər iki hal üçün təsadüfi kəmiyyətin paylanma cədvəllərini (cədvəl 10 və cədvəl 11) quraq və həmin cədvəllər əsasında orta qiyməti $\bar{X}$ (yəni riyazi gözləməni $M(X)$) hesablayaq.

Cədvəl 10

I hal

x_i	7	8	9	12	14
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Cədvəl 11

II hal

x_i	2	3	12	16	17
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

I. $\bar{X}=M(X)=7\cdot\frac{1}{5}+8\cdot\frac{1}{5}+9\cdot\frac{1}{5}+12\cdot\frac{1}{5}+14\cdot\frac{1}{5}=10.$

II. $\bar{X}=M(X)=2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}+12\cdot\frac{1}{5}+16\cdot\frac{1}{5}+17\cdot\frac{1}{5}=10.$

Təsadüfi kəmiyyətin hər iki hal üçün bu cür paylanmasından və onun orta qiymətindən istifadə edərək $x_i-\bar{X}$ (və ya $(x_i-M(X))$) meyletməsinin paylanma cədvəllərini quraq (cədvəl 12 və cədvəl 13):

Cədvəl 12

I hal

$x_i - \bar{X}$	-3	-2	-1	2	4
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Cədvəl 13

II hal

$x_i - \bar{X}$	-8	-7	2	6	7
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Bu cədvəllərdə təsadüfi kəmiyyət yerində x_i -lərin orta qiymətdən meyli $x_i - \bar{X}$ (və ya $x_i - M(X)$) durur. Cədvəllərdən görünür ki, aparılmış **II** hesablamalardakı meyletmələrin paylanması daha böyük amplitudalara malikdir.

Təsadüfi kəmiyyətin öz orta qiymətindən (riyazi gözləməsindən) meylinin orta qiyməti (riyazi gözləməsi) həmişə sıfıra bərabərdir.

$$\begin{aligned}\text{Doğrudan da,} \quad \overline{x - \bar{x}} &= M[X - M(X)] = \sum_i (x_i - \bar{X})p_i = \\ &= \sum_i x_i \cdot p_i - \bar{X} \sum_i p_i = \bar{X} - \bar{X} \cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

Baxılan misallarda da eyni nəticələr alınır. Yəni $\bar{X} = 10$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\text{I.} \quad \overline{x - \bar{x}} = \overline{x - 10} = -3 \cdot \frac{1}{5} - 2 \cdot \frac{1}{5} - 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = 0,$$

$$\text{II.} \quad \overline{x - 10} = -8 \cdot \frac{1}{5} - 7 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 6 \cdot \frac{1}{5} + 7 \cdot \frac{1}{5} = 0 \text{ olur.}$$

Beləliklə, meylətmənin orta qiyməti həmişə sıfıra bərabər olduğundan o, təsadüfi kəmiyyətin paylanma xarakteristikasını verə bilməz. Ona görə də bu məqsədlə təsadüfi kəmiyyətin meylətməsinin mütləq qiymətinin orta qiyməti götürülür:

$$/ \overline{X - \bar{X}} / = \sum_i / x_i - \bar{X} / p_i$$

Buna isə sadəcə olaraq *orta meylətmə* (*orta meyl*) deyilir və orta meylətmə təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin mərkəzi nöqtəyə (orta qiymətə) yaxınlığını göstərir. Məsələn, bu kəmiyyət atəş zamanı güllənin hədəfə yaxın nöqtəyə düşmə göstəricisidir.

Təsadüfi kəmiyyətin səpələnmə xarakteristikasını vermək üçün meylətmənin kvadratının orta qiymətindən istifadə etmək əlverişli olur. Buna təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası deyilir. Yəni təsadüfi kəmiyyətin daha bir mühüm ədədi xarakteristikası *dispersiya* adlanır.

Təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası təsadüfi kəmiyyətin onun riyazi gözləməsi (orta qiyməti) ətrafında nə dərəcədə

səpələnməsini əks etdirir. Deməli, təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətlərinin onun mərkəzi, yəni riyazi gözləməsi ətrafında səpələnməsi dispersiya ilə xarakterizə olunur. “Dispersiya” latın sözü olan “dispersio” sözündən götürülmüş və tərcüməsi “səpələnmə” mənasını verir. Dispersiya böyük olduqda səpələnmə də böyük olur.

T ə r i f. Təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsindən (orta qiymətindən) meylinin kvadratının riyazi gözləməsinə (orta qiymətinə) təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası deyilir. X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası belə işarə edilir: $D(X)$.

Deməli, tərifə görə

$$D(X) = M[X - M(X)]^2, \quad (30)$$

burada

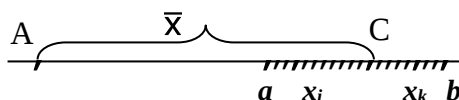
X - təsadüfi kəmiyyət,

$M(X)$ - təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi,

$D(X)$ - təsadüfi kəmiyyətin dispersiyasıdır.

Tutaq ki, A nöqtəsindən C nöqtəsinə atəş açırıq. AC məsafəsi $\bar{X}$ olsun. Aydın ki, müxtəlif təsirlər (əlimizin əsməsi, küləyin müqaviməti, güllənin forması və s.) nəticəsində atəş C nöqtəsi ətrafında səpələnəcək (şəkil 14).

Belə ki, atılan güllələr ya C nöqtəsindən əvvələ, ya da C -dən sonraya düşəcək. Deməli, X



Şək. 14

təsadüfi kəmiyyətinin

qiyməti üçün ya $X < \bar{X}$, ya da $X > \bar{X}$ olacaq. Burada $X - \bar{X}$ fərqi meyl adlanır, yəni X -in $\bar{X}$ -dən nə qədər meyl etdiyini, başqa sözlə nə qədər fərqləndiyini göstərir.

$X - \bar{X}$ fərqləndiricinin özü də təsadüfi kəmiyyətdir, həm də müsbət və ya mənfi ola bilər. Yəni güllə C -dən qabağa düşdükdə bu fərq mənfi, sonraya düşdükdə isə müsbət olacaq. Odur ki, hesablamalarda $X - \bar{X}$ fərqləndiricinin (meylin)

mütləq qiymətini və ya kvadratını götürmək lazımdır. Burada $\bar{X}$ orta qiymət və ya riyazi gözləmədir.

Beləliklə, baxılan məsələdə araşdırılan təsadüfi kəmiyyətin bütün mümkün qiymətlərinin sayı 5 olarsa, onda onun meyli ilə uyğun ehtimalların paylanma cədvəli aşağıdakı kimi (cədvəl 15) olar:

Cədvəl 15

$x_1 - \bar{X}$	$x_2 - \bar{X}$	$x_3 - \bar{X}$	$x_4 - \bar{X}$	$x_5 - \bar{X}$
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

Ona görə də belə səpələnmiş təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi, yəni X -in dispersiyası aşağıdakı düsturla da hesablanı bilər:

$$D(X) = (x_1 - \bar{X})^2 \cdot p_1 + (x_2 - \bar{X})^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2 \cdot p_n =$$

$$= \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{X})^2 \cdot p_k \quad (31)$$

və ya

$$D(X) = \sum_{k=1}^n [x_k - M(X)]^2 \cdot p_k . \quad (32)$$

Aşağıdakı mühakimədən də aydın olur ki, təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası onun mümkün qiymətlərinin riyazi gözləməsi ətrafında səpələnmə sıxlığını göstərir. Belə ki, X təsadüfi kəmiyyətinin qiymətləri riyazi gözləməyə yaxın

olduqda $D(X) = \sum_{k=1}^n [x_k - M(X)]^2 \cdot p_k$ cəminin hədləri çox kiçik

ədədlər olur və odur ki, bu cəm də kiçilir. Əksinə, təsadüfi kəmiyyətin qiymətləri riyazi gözləmədən uzaq düşdükcə

cəmin hədləri böyüyür və nəticədə $D(X) = \sum_{k=1}^n [x_k - M(X)]^2 \cdot p_k$

cəminin qiyməti böyük ədəd olur. Bu isə o deməkdir ki,

dispersiyanı təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin riyazi gözləmə ətrafında *səpələnməsinin ölçüsü* hesab etmək olar.

T ə r i f. X təsadüfi kəmiyyətinin meylinin kvadratı ilə uyğun ehtimalların hasilləri cəminə dispersiya deyilir.

Dispersiyanın aşağıdakı xassələri var.

1. Sabitin dispersiyası sifıra bərabərdir:

$$D(C)=0.$$

2. Sabit vurugu kvadrata yüksəldərək dispersiya işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:

$$D(CX)=C^2D(X).$$

3. Sonlu sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin dispersiyası toplananların dispersiyaları cəminə bərabərdir:

$$D(X_1+X_2+\dots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\dots+D(X_n).$$

M ə s ə l ə 5. Diskret təsadüfi X kəmiyyətinin verilmiş paylanma qanununa görə **Cədvəl 16** (cədvəl 16) dispersiyasını tapın.

x_i	0	1	2
p_i	0,0625	0,375	0,5625

H ə l l i. Təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsini tapaq:

$$M(X)=0\cdot0,0625+1\cdot0,375+2\cdot0,5625=1,5.$$

Meyletmənin kvadratının mümkün qiymətlərini hesablayaq:

$$[x_1-\bar{X}]^2=[x_1-M(X)]^2=(0-1,5)^2=2,25;$$

$$[x_2-\bar{X}]^2=[x_2-M(X)]^2=(1-1,5)^2=0,25;$$

$$[x_3-\bar{X}]^2=[x_3-M(X)]^2=(2-1,5)^2=0,25.$$

Onda $[X-M(X)]^2$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu belə olar (cədvəl 17):

Cədvəl 17

$[X-M(X)]^2$	2,25	0,25	0,25
p_i	0,0625	0,375	0,5625

Deməli, (31)-dən istifadə etməklə dispersiyanı hesablaya bilərik:

$$D(X)=2,25\cdot0,0625+0,25\cdot0,375+0,25\cdot0,5625=0,375.$$

M ə s ə l ə 6. X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma qanunu verilir (cədvəl 18 və cədvəl 19):

Cədvəl 18

x_i	-3	-1	1	3
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$

Cədvəl 19

y_i	-3	-1	1	3
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$D(X)$ və $D(Y)$ -i tapın.

H ə l l i. Əvvəlcə bu cədvəllərə uyğun olaraq riyazi gözləmələri hesablayaq:

$$M(X)=(-3)\cdot\frac{1}{6}+(-1)\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{6}=0,$$

$$M(Y)=(-3)\cdot\frac{1}{5}+(-1)\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}=0.$$

Nəhayət, (31) düsturuna görə dispersiyanı tapmaq olar:

$$D(X)=9\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{1}{5}+9\cdot\frac{1}{6}=3,4$$

$$D(Y)=9\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{1}{5}+9\cdot\frac{1}{5}=4.$$

Baxdığımız məsələlərdə təsadüfi kəmiyyətin dispersiyasını hesablayarkən (31) düsturundan istifadə etdik. Bununla yanaşı dispersiyanı hesablamaq üçün daha əlverişli başqa bir düsturdan istifadə edilir. Həmin düsturun çıxarılışı üçün (31)-in sağ tərəfində aşağıdakı çevirməni aparaq:

$$\begin{aligned} D(X) &= \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{X})^2 \cdot p_k = \sum_{k=1}^n [x_k - M(X)]^2 \cdot p_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \{x_k^2 - 2[M(X)]x_k + [M(X)]^2\} p_k = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - 2M(X) \sum_{k=1}^n x_k p_k + [M(X)]^2 \sum_{k=1}^n p_k. \end{aligned}$$

Burada $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ və $\sum_{k=1}^n x_k p_k = M(X)$ olduğunu nəzərə alsaq aşağıdakı bərabərliyi alarıq:

$$D(X) = \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - [M(X)]^2. \quad (33)$$

Bu bərabərliyə daxil olan cəm paylanma qanunu aşağıdakı kimi (cədvəl 20) verilmiş təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsidir:

Cədvəl 20

Belə təsadüfi kəmiyyət X təsadüfi kəmiyyətinin kvadratıdır və X^2 kimi işarə edilir. Yəni

x_1^2	x_2^2	...	x_k^2	...	x_n^2
p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 p_k = M(X^2).$$

Beləliklə, bu deyilənləri (33) düsturunda nəzərə alsaq təsadüfi kəmiyyətin dispersiyasını hesablamaq üçün daha əlverişli olan aşağıdakı düsturu alarıq:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \quad (34)$$

Qeyd edək ki, bu düsturu yuxarıdakı tərifə görə yazdığımız $D(X) = M[X - M(X)]^2$ düsturundan da almaq olar. Doğrudan da həmin düsturda $M(X) = a$ qəbul etsək alarıq:

$$\begin{aligned} D(X) &= M[X - M(X)]^2 = M[X - a]^2 = M[X^2 - 2aX + a^2] = \\ &= M[X^2] - M[2aX] + M[a^2]. \end{aligned}$$

Burada a sabit olduğundan riyazi gözləmənin 2-ci xassəsinə əsasən $M[2aX] = 2aM[X]$ və $M[a^2] = a^2$. Ona görə də

$$\begin{aligned} D(X) &= M[X^2] - M[2aX] + M[a^2] = M[X^2] - 2aM[X] + a^2 = \\ &= M[X^2] - 2a^2 + a^2 = M[X^2] - [M(X)]^2. \end{aligned}$$

T ə r i f: Təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası bu kəmiyyətin kvadratının riyazi gözləməsi ilə onun riyazi gözləməsinin kvadratı fərqinə bərabərdir.

M ə s ə l ə 7. Verilmiş paylanma qanununa əsasən (cədvəl 21) X diskret təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyasını tapın.

Cədvəl 21

x_i	4,3	5,1	10,6
p_i	0,2	-0,3	0,5

H ə l l i. Dispersiyanı axıncı (34) düsturundan istifadə etməklə tapaq. Bunun üçün əvvəlcə (29) düsturu vasitəsilə X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini hesablayaq: $M(X) = 4,3 \cdot 0,2 + 5,1 \cdot (-0,3) + 10,6 \cdot 0,5 = 0,86 - 1,53 + 5,3 = 4,63$.

İndi isə X^2 -nin paylanma qanununu yazaq (cədvəl 22): Onda X^2 -nin riyazi gözləməsi aşağıdakı kimi hesablanır:

Cədvəl 22

x_i^2	18,49	26,01	112,4
p_i	0,2	-0,3	0,5

$$M(X^2) = 18,49 \cdot 0,2 + 26,01 \cdot (-0,3) + 112,4 \cdot 0,5 = 3,698 - 7,8 + 56,2 = 52,1.$$

Nəhayət, (34) düsturu ilə dispersiyanı hesablamaq olar:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 52,1 - 21,4369 = 30,66.$$

M ə s ə l ə 8. X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununa görə (cədvəl 23) dispersiyasını tapın.

Cədvəl 23

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

H ə l l i. Əvvəlcə (29) düsturu vasitəsilə X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini hesablayaq:

$$M(X) = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,1 = 3,1.$$

X^2 -nin paylanma qanununu yazaq (cədvəl 24). Onda X^2 -nin riyazi gözləməsi belə olar:

Cədvəl 24

x_i^2	1	4	9	16	25
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

$$M(X^2) = 1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,3 + 16 \cdot 0,3 + 25 \cdot 0,1 = 10,9.$$

$$\text{Deməli, } D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 10,9 - 3,1^2 = 1,29.$$

M ə s ə l ə 9. X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununa görə (cədvəl 25) dispersiyasını tapın.

Cədvəl 25

x_i	2	4	6	8	10
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

H ə l l i. Dispersiyanı iki müxtəlif üsulla hesablayaq. Əvvəlcə (29) düsturundan istifadə edərək riyazi gözləməni tapaq:

$$M(X)=2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+6\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{8}+10\cdot\frac{1}{4}=0,5+0,5+1,5+1+2,5=6.$$

İndi isə $[X-M(X)]^2=(X-6)^2$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu yazaq (cədvəl 26):

Cədvəl 26

$[X-M(X)]^2$	16	4	0	4	16
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Dispersiyanı əvvəlcə (30) düsturundan istifadə edərək hesablayaq:

$$\begin{aligned} D(X) &= M[X-M(X)]^2 = M(X-6)^2 = \\ &= 16\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + 0\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + 16\cdot\frac{1}{4} = 9. \end{aligned}$$

İndi isə dispersiyanı $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$ düsturu ilə hesablayaraq və nəticələri müqayisə edək. Bunun üçün X^2 təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu yazaq (cədvəl 27).

Cədvəl 27

x_i^2	4	16	36	64	100
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Bu cədvəl əsasında (29) düsturundan istifadə edərək riyazi gözləməni hesablayaq:

$$M(X^2)=4\cdot\frac{1}{4}+16\cdot\frac{1}{8}+36\cdot\frac{1}{4}+64\cdot\frac{1}{8}+100\cdot\frac{1}{4}=45.$$

Nəhayət, (34) düsturu ilə dispersiyanı hesablamaq olar:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=45-6^2=45-36=9.$$

Beləliklə, hər iki halda eyni nəticəni alırıq. Lakin müqayisə etmək olar ki, hansı üsul daha az hesablama tələb edir.

3. Orta kvadratik meyl. Dispersiyanın tərifindən, yəni (2) düsturundan meylətmənin $(X-M(X))$ və ya $X-\bar{X}$ -in kvadratının nəyə bərabər olması haqqında təsəvvür yaranır. Meylətmənin özünün qiymətinin tapılması üçün isə dispersiyadan kvadrat kök almaq lazımdır.

Tərif. Dispersiyanın kvadrat kökünə orta kvadratik meyl deyilir. Orta kvadratik meyl yunan hərfi σ (siqma) ilə işarə edilir: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ (35)

Təcrübə göstərir ki, təsadüfi kəmiyyətin qüvvətlərinin səpələnmə xarakteristikasını vermək üçün orta kvadratik meyl düsturunun (35) tətbiq edilməsi daha sərfəlidir. Yəni orta kvadratik meyl dispersiya ilə müqayisədə daha əlverişli səpələnmə xarakteristikasıdır. Belə ki, orta kvadratik meyl ilkin verilən kəmiyyətlə eyni ölçülü olur. Dispersiyanın ölçüsü isə tərifdən göründüyü kimi X təsadüfi kəmiyyətinin ölçüsünün kvadratına bərabərdir.

Beləliklə, iki ədədi xarakteristika, yəni $M(X)$ -riyazi gözləmə və $\sigma(X)$ - orta kvadratik meyl məlum olduqda təsadüfi kəmiyyətin səpələnmə dairəsi haqqında təxmini təsəvvür əldə etmək olur.

M ə s ə l ə 10. Təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanununa görə (cədvəl 28) onun orta qiymətini (riyazi gözləməsini) və orta kvadratik meylini tapın.

Cədvəl 28

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

H ə l l i: Orta kvadratik meylin tapılması üçün dispersiya məlum olmalıdır. Dispersiyanı isə tərifdən istifadə edərək hesablamaq olar. Lakin nəticəyə daha tez gətirən

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$$

düsturundan istifadə etmək sərfəlidir. Əvvəlcə (29) düsturundan istifadə edərək X-in riyazi gözləməsini tapaq:

$$\bar{X}=M(X)=0 \cdot 0,1+1 \cdot 0,3+2 \cdot 0,3+3 \cdot 0,2+4 \cdot 0,1=1,9.$$

İndi isə X^2 -nin riyazi gözləməsini hesablayaq. Bunun üçün X^2 -nin paylanmasını

Cədvəl 29

x_i^2	0	1	4	9	16
p_i	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

yazaq (cədvəl 29).

Onda X^2 -nin riyazi gözləməsi belə olar:

$$M(X^2)=0 \cdot 0,1+1 \cdot 0,3+4 \cdot 0,3+9 \cdot 0,2+16 \cdot 0,1=4,9.$$

Deməli, axtarılan dispersiya aşağıdakı kimi tapılır:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=4,9-3,61=1,29.$$

Nəhayət, orta kvadratik meyl tapılır:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1,29} \approx 1,136.$$

M ə s ə l ə 11. Cədvəl şəklində verilmiş (cədvəl 30) paylanma qanununa

Cədvəl 30

x_i	4	6	8	10	12
p_i	0,3	0,15	0,18	0,17	0,2

əsasən təsadüfi

kəmiyyətin

dispersiyasını və orta

kvadratik meylini tapın.

H ə l l i. Dispersiyanı tərifdən istifadə edərək hesablamaq olar. Lakin nəticənin daha tez alınması üçün

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$$

düsturundan istifadə edək. Odur ki, əvvəlcə (29) düsturundan istifadə edərək X-in riyazi gözləməsini tapaq:

$$M(X)=4 \cdot 0,3+6 \cdot 0,15+8 \cdot 0,18+10 \cdot 0,17+12 \cdot 0,2=7,64.$$

İndi isə X^2 -nin paylanma

Cədvəl 31

x_i^2	16	36	64	100	144
p_i	0,3	0,15	0,18	0,17	0,2

qanununu yazaq

(cədvəl 31). Bundan

sonra X^2 -nin riyazi

gözləməsini tapmaq olar:

$$M(X^2)=16 \cdot 0,3+36 \cdot 0,15+64 \cdot 0,18+100 \cdot 0,17+144 \cdot 0,2= \\ =4,8+5,4+11,52+17+28,8=67,52.$$

Deməli, axtarılan dispersiyanı aşağıdakı kimi tapırıq:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=67,52-58,37=9,15.$$

Orta kvadratik meyl isə belə tapılır:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} = \sqrt{9,15} \approx 3,025.$$

II fəslə aid çalışmalar

1. Qutuda 16 kürəcik var. Bunlardan 12-si qırmızı və 4-ü qaradır. Qutudan təsadüfi götürülən iki kürəciyin qırmızı olması ehtimalını tapın. (c. 0,55).
2. Səid telefon nömrəsini yığarkən rəqəmlərdən birini unutduğundan onu təsadüfi yığdı. Yığılan rəqəmin düzgün olma ehtimalını tapın. (c. $1/10=0,1$)
3. Səbətdə eyni böyüklükdə 5 qırmızı və 4 ağ alma var. Səbətdən təsadüfi götürülən 3 almanın qırmızı olması ehtimalını tapın (c. 0,119).
4. Satış üçün marketə daxil olan 500 su nasosundan 10-u axıdır. Təsadüfi götürülmüş bir nasosun axıtmaması ehtimalını tapın (c. $490/500=0,98$).
5. Abonent telefon nömrəsini yığarkən axırıncı rəqəmi unutdu və tək rəqəm olduğunu xatırlayaraq onu təsadüfi yığdı. Yığılan rəqəmin düzgün olma ehtimalını tapın (c. 0,5).
6. Torbada eyni böyüklükdə 8 kürəcik var və onların hər birinin üzərində 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13 ədədlərindən yalnız biri yazılmışdır. Bu torbadan təsadüfi götürülən iki kürəcik üzərində yazılmış ədədlərin ortaq böləninin olması ehtimalını tapın. (c. $p \approx 0,357$).

7. Tələbə imtahan biletlərinə düşən 60 sualdan 50-ni bilir. Tələbənin təsadüfi çəkdiyi biletə düşən iki sualı bilməsi ehtimalını tapın. (c. $p \approx 0,69$).

8. Tələbə 80 imtahan sualından 72-ni bilir. Tələbənin çəkdiyi biletə düşən 3 sualı bilməsi ehtimalını tapın. (c. $p \approx 0,73$).

9. Fabrikdə istehsal olunan 100 çantadan 8-i yararsızdır. Bir çantanın yararlı olması ehtimalını tapın.

10. Satışa verilmiş 80 kalkulyatordan 12-si yararsızdır. Mağazadan alınmış bir kalkulyatorun yararlı olması ehtimalını tapın (c. 0,85).

11. Yeni işə salınmış sexdə istehsal olunan ilk partiya 26 detaldan 6-sı keyfiyyətsizdir. İxtiyari götürülmüş iki detalın keyfiyyətsiz olması ehtimalını tapın (c. $p \approx 0,046$).

12. Satış üçün mağazaya daxil olan 25 detaldan 6-sı yararsızdır. Təsadüfi seçilmiş 3 detaldan a) hamısının yararlı, b) hamısının yararsız və c) yalnız birinin yararsız olması ehtimalını tapın. (c. 0,84; 0,0087; 0,32)

c)-nin həlli. Seçilmiş detallardan birinin yararsız olması hadisəsi A olsun. Aydındır ki, 25 detaldan 3-nün seçilməsi üçün mümkün halların sayı

$$C_{25}^3 = 25!/3!22! = 23 \cdot 24 \cdot 25/6 = 2300.$$

Həmçinin 6 yararsız detaldan birinin və eyni zamanda 25-6=9 yararlı detaldan ikisinin seçilməsi üçün mümkün halların sayı

$$C_6^1 \cdot C_{19}^2 = 6 \times 171 = 1026.$$

Onda ehtimalın klassik tərifinə görə A hadisəsinin ehtimalı $P(A) = m/n = C_6^1 \cdot C_{19}^2 / C_{25}^3 = 1026/2300 \approx 0,446$.

13. Səbətdə 12 ağ, 10 qırmızı, 6 yaşıl və 4 sarı rəngli yumurta var. Səbətdən bir yumurta götürülür. Toplama teoremindən istifadə edərək həmin yumurtanın rəngli olması (ağ olmaması) ehtimalını tapın (c. 0,625).

14. Yeni alınmış 65 detaldan 39-u standartlara uyğundur. Təsadüfi olaraq iki detal ardıcıl götürülür. Ehtimalların hasilindən istifadə edərək həmin detalların hər ikisinin standarta uyğun olması ehtimalını tapın (c. $p \approx 0,356$).

15. Bir zər 5 dəfə atılır. Bernulli düsturundan istifadə edərək 2 dəfə beş xal düşməsi ehtimalını tapın.(c. $p \approx 0,16$).

16. Standarta uyğun olmayan detalın hazırlanması ehtimalı 0,1-dir. Bernulli düsturundan istifadə edərək təsadüfi götürülmüş 5 detaldan 3-nün standarta uyğun olması ehtimalını tapın (c. 0,0729).

17. Torbada müxtəlif rəngli 30 kürəcik var. Torbadan təsadüfi çıxarılan 2 kürəciyin qırmızı rəngli olması ehtimalı $1/29$ – ə bərabərdir. Torbadakı qırmızı rəngli kürəciklərin sayını tapın. (c.6). *(Göstəriş: bu məsələ tərs məsələdir. Yəni hadisənin ehtimalı verilir və kürəciklərin sayı soruşulur. Odur ki, qırmızı kürəciklərin sayını x -lə işarə edərək tənlik qurmaqla məsələni həll etmək olar).*

18. Qutuda bəziləri rənglənmiş 10 detal var. Qutudan götürülən 2 detalın rəngli olması ehtimalı $2/15$ -dir. Rəngli detalların sayını tapın. (c. 4).

19. X təsadüfi kəmiyyəti aşağıdakı paylanma qanunu ilə verilmişdir:

a)	x_i	2	4	5	6	b)	x_i	1	3	5	7
	p_i	0,3	0,1	0,2	0,4		p_i	0,4	0,1	0,5	0,3

Paylanma çoxbucaqlısını (poliqonu) qurun.

20. X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu aşağıdakı kimidir: a) x_i -1 2 3

p_i 0,35 0,85 0,5

b)	x_i	1	2	4	5
	p_i	0,31	0,1	0,29	0,3

Riyazi gözləməni, dispersiyanı və orta kvadratik meyletməni tapın.

21. Paylanma qanunu aşağıdakı cədvəllərlə verilmiş təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləməsi və dispersiyasını tapın:

1)

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,5	0,3	0,1

2)

y_i	1	3	4	6	7
p_i	0,9	0,7	0,3	0,4	0,1

1)

z_i	5	7	10	15
p_i	0,2	0,5	0,2	0,1

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

Adətən təbiət və cəmiyyətdə baş verən bir çox hadisə və proseslər qarşılıqlı əlaqədə olur və bir-birinə təsir edirlər. Bu əlaqələrin hamısını izləmək və onların hər birinin hadisələrin gedişinə təsirini müəyyən etmək heç də həmişə mümkün olmur. Ona görə də yalnız baxılan hadisələrə təsir edə bilən əsas faktorların öyrənilməsi ilə kifayətlənilir. Göstərilən əlaqələrin üzə çıxarılmasının əsasında isə müşahidələr dayanır. Belə ki, hadisənin tabe olduğu ümumi qanunauyğunluqları aşkar etmək üçün onu dəfələrlə müşahidə etmək lazımdır. Bu qayda ilə əldə edilən müəyyən nəticələr toplandıqdan sonra qarşıya belə bir mühüm sual çıxır: müşahidələrin nəticələrini necə emal etmək və axtarılan qanunauyğunluqlar barədə necə əsaslandırılmış nəticələr əldə etmək olar? Bu suala və eləcə də verilənlərin emalı ilə bağlı bir sıra digər suallara *riyazi statistika*¹ cavab verir.

§3.1. Statistika haqqında anlayış. Riyazi statistikanın predemeti

Statistika elmi çoxəsrlik bir tarixə malikdir və digər elm sahələri kimi insanların praktik ehtiyaclarından yaranmışdır. Hələ qədim dövrlərdən əhalinin sayı, yaşı, əmək məşğulluğu, əmlakı, istehsal vasitələri və s. haqqında məlumatlar toplanılırdı. O cümlədən, hərbi xidmət, vergi yığılması və digər ictimai məqsədlərlə əhalinin siyahıya

¹ Statistika sözü italyan dilindən (stato) tərcümədə dövlət və latın dilindən (status) tərcümədə isə vəziyyət mənasını verir.

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

alınması təşkil edilirdi. Zaman keçdikcə insan cəmiyyəti və kütləvi ictimai hadisələrlə bağlı bu cür məlumatların toplanması çox geniş miqyas almış və requlyar xarakter daşımağa başlamışdır.

Cəmiyyət həyatının bütün sahələrini və eləcə də bütün təbiət hadisələrini əhatə edən belə məlumatlar hər şeydən əvvəl qərar qəbul etmək üçün işlənir və təhlil edilir.

Bütün bu cür və buna bənzər məlumatlar statistik verilənləri əmələ gətirir. Yəni statistik verilənlər dedikdə bu və ya digər xassələrə malik olan obyektlərin sayı haqqında məlumat nəzərdə tutulur. Onları bəzən *variantlar*, *dəyişənlər*, *qiymətlər*, *kəmiyyətlər* və s. adlandırırlar. Statistika isə verilənlərin, yəni ən müxtəlif kütləvi kəmiyyət hadisələrinin öyrənilməsi, emalı və təhlil edilməsi haqqında elmdir. Yəni statistika elə bir elm sahəsidir ki, burada böyük massivlər emal olunur və baxılan statistik verilənlərin tədqiqat obyektləri bir-birindən elementlərinin müxtəlifliyi ilə fərqlənən kütləvi bircins hadisələrdir. Deməli, statistikanın əsas məsələsi ədədi verilənlərin yığılması, ümumiləşdirilməsi və emalından ibarətdir. Statistikanın mühüm xarakterik xüsusiyyətlərindən biri ondan ibarətdir ki, hadisə və proseslərin kəmiyyət tərəfini öyrənərkən o həmişə tədqiq olunan hadisələrin keyfiyyət tərəflərini də əks etdirir.

Statistikanın məzmunu aşağıdakı üç bölmədən ibarətdir:

1. Statistik verilənlərin (məlumatların) toplanması;
2. Toplanmış verilənlərin statistik tədqiqı, yəni kütləvi müşahidələr nəticəsində toplanmış məlumatlara əsaslanan qanunauyğunluqların aydınlaşdırılması;
3. Statistik müşahidə və statistik analiz üsullarının hazırlanması.

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

Statistik verilənlər üzərində müəyyən riyazi əməliyyatlar aparmaq, bu verilənlərə görə proqnozlar vermək və onların doğruluğunu qiymətləndirmək olar. Bütün bunlarla “Riyazi statistika” elmi məşğul olur.

Beləliklə, riyazi statistika riyaziyyatın statistik verilənlərin təyin edilib yığılması, sistemləşdirilməsi, emalı və şərh edilməsi, eləcə də onların elmi və praktiki nəticələr alınmasında istifadəsinə həsr edilmiş xüsusi bir bölməsidir.

Riyazi statistika ehtimal nəzəriyyəsi ilə sıx surətdə bağlıdır. Belə ki, riyazi statistikada bütün baxılan məsələlərin həllində ehtimal nəzəriyyəsinin anlayışları və metodlarından istifadə edilir. Başqa sözlə desək, riyazi statistikada məsələlərin həlli təsadüfi proseslərin qanunauyğunluqlarını öyrənən ehtimal nəzəriyyəsi üzərində qurulur. Beləliklə, riyazi statistikanın bütün üsul və vasitələri statistik verilənlər əsasında tədqiq olunan hər bir məsələdə nəticələrin etibarlılığı və dəqiqliyini qiymətləndirməyə imkan verən ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanır.

Təsadüfi hadisələrin ehtimal üsulları ilə aparılan bütün tədqiqatları birbaşa və ya dolayısı ilə müəyyən eksperimental verilənlərə və eləcə də müvafiq təcrübə və müşahidələrin nəticələrinə əsaslanır.

Riyazi statistikanın predmeti kütləvi sınaqlar və ya təsadüfi hadisələrin müşahidəsi nəticəsində təyin olunan (alınan) eksperimental verilənlərin (statistik məlumatların) qeydiyyatı, təsviri və təhlili üçün üsulların yaradılmasından ibarətdir. Başqa sözlə desək, statistikanın predmeti xüsusi riyazi-statistik üsulların tətbiqi ilə statistik yığımların qiymətləndirilməsindən ibarətdir. Bu baxımdan yuxarıda göstərilən bölmələrə müvafiq olaraq üç mərhələni qeyd etmək olar:

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

- verilənlərin yığılması;
- verilənlərin emalı;
- statistik nəticə - proqnozlar və qərarlar.

Belə ki, statistik verilənlər toplanır, emal edilir və alınmış nəticələrə əsasən mülahizələr söylənilir, proqnozlar verilir və nəhayət, qərarlar qəbul edilir.

Deməli, obyektlər və eləcə də hadisə və proseslərin tədqiq olunması müşahidə və sınaqların nəticələri əsasında, yəni statistik verilənlərin öyrənilməsi əsasında həyata keçirilir. Ona görə də riyazi statistikanın birinci məsələsi statistik verilənlərin yığılması və qruplaşdırılması üsullarının müəyyən edilməsindən ibarətdir.

Riyazi statistikanın ikinci məsələsi isə tədqiqat məqsədindən asılı olaraq statistik verilənlərin təhlil üsullarının yaradılmasından ibarətdir.

Beləliklə, riyazi statistikanın vəzifəsi elmi və praktiki nəticələr əldə etmək üçün statistik verilənlərin yığılması, sistemləşdirilməsi və emalı üsullarının yaradılmasından ibarətdir.

Riyazi statistikanın tətbiqlərinin genişlənməsi ilə əlaqədar olaraq yeni elm sahələri yaranmışdır. Məsələn, iqtisadi statistika, tibbi statistika, sosial statistika, bioloji statistika, statistik fizika və s. Yüksək sürətli EHM-lərin yaradılması ilə əlaqədar olaraq insan fəaliyyətinin müxtəlif sahələrində riyazi statistikanın tətbiqləri daim artır.

**§3.2. Riyazi statistikanın əsas anlayışları.
Statistik yığımlar. Baş və seçmə yığım.**

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi riyazi statistika kütləvi hadisələr və proseslər üzərində müşahidələr aparır və bu müşahidələrin nəticələrinə əsaslanaraq onların qanunauyğunluqlarını öyrənir, nəhayət, müvafiq nəticələrə görə müəyyən proqnozlar verir və statistik qərarlar qəbul edir. Üzərində müşahidə və sınaqlar aparılan kütləvi hadisə və proseslərə *statistik yığım* deyilir. Yəni statistik yığım, elementləri bir-birindən heç olmasa bir xüsusiyyətə (əlamətə) görə fərqlənən statistik verilənlər çoxluğuna deyilir. Məsələn, “İbtidai sinif müəllimliyi” ixtisası üzrə təhsil alan tələbələrə yay imtahan sessiyasını əla qiymətlərlə başa vuranlar.

Ayındır ki, statistik yığım müşahidə və sınaqların nəticələrindən ibarət olduğundan ədədi verilənlər yığımıdır.

Riyazi statistikada *baş (ümumi) yığım* və *seçmə yığım (seçmə)* əsas anlayışlardır.

Tutaq ki, müəyyən xüsusiyyətinə görə bircins olan obyektlər yığımının hər hansı kəmiyyət və ya keyfiyyət əlamətlərinə görə öyrənilməsi tələb edilir. Məsələn, zavodda istehsal olunmuş müəyyən partiya detalın keyfiyyət göstəricisi onun standarta uyğun gəlməsi, kəmiyyət göstəricisi isə onun ölçüsü ola bilər.

Yığma daxil olan bütün obyektlərin hər birinin tələb olunan əlamətə görə yoxlanılması daha məqsədəuyğundur. Lakin müxtəlif səbəblərdən asılı olaraq çox zaman bunu etmək mümkün olmur. Yəni praktikada yığımın bütün obyektlərini çox nadir hallarda tədqiq edirlər. Əksər hallarda isə müxtəlif səbəblərdən asılı olaraq hər bir obyektə tədqiq

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

etmək ya səmərəli deyil ya da bu mümkün olmur. Məsələn, əgər baxılan yığımdakı obyektlər külli miqdarda olarsa və ya aparılan tədqiqat çox vaxt aparacaqsas, ya da nəzərdə tutulan tədqiqat böyük xərclər tələb edirsə, onda bütün obyektlərin tədqiq olunması sərfəli deyil. Həm də nəzərə almaq lazımdır ki, bəzən obyektlərin tədqiqi onların məhv edilməsi üçün aparılır və belə hallarda bütün obyektlərin tədqiq olunması məsləhət görülmür.

Belə hallarda bütün obyektlər yığımından təsadüfi olaraq müəyyən hissə seçilir və yalnız həmin hissə tədqiq olunur. Yəni bütün yığım əvəzinə bu yığımdan məhdud sayda elementlər seçilir və tədqiq edilir. Buna görə də *baş yığım* və *seçmə yığım* anlayışlarını bir-birindən fərqləndirirlər.

Beləliklə, bütün obyektlər yığımının tədqiqi mümkün deyilsə, bunlardan müəyyən bir hissə öyrənmək üçün seçilir.

Bütün yığımdan müəyyən üsulla təsadüfi seçilmiş obyektlər yığımina *seçmə yığım* (və ya sadəcə *seçmə*) deyilir. Nəzərə almaq lazımdır ki, burada təsadüfi seçilmiş obyektlər dedikdə elə seçim nəzərdə tutulur ki, bu seçimdə baş yığının bütün obyektlərinin *seçmə yığımı* düşmə şansları eyni olsun.

Tədqiq olunmaq üçün nəzərdə tutulan bütün obyektlər yığımina *baş yığım* deyilir.

Seçmə əməliyyatı adətən iki qayda ilə aparılır. Birinci qaydada müəyyən bir obyekt baş yığımdan götürülür və tədqiq edilərək yenə baş yığımı qaytarılır. Sonra, yenə müəyyən bir obyekt baş yığımdan çıxarılır və tədqiq olunaraq baş yığımı qaytarır və s. Bu qayda ilə alınan *seçmə təkrar seçmə* adlanır. İkinci qaydada isə obyektlər tədqiq olunduqdan sonra baş yığımı qaytarılmır və bu halda alınan *seçməyə təkrarsız seçmə* deyilir.

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

Beləliklə, təkrarsız seçmədə hər bir obyekt yalnız bir dəfə tədqiq edilir, təkrar seçmədə isə eyni bir obyekt bir neçə dəfə tədqiqatdan keçə bilər.

Praktikada adətən təkrarsız seçmədən istifadə edilir. Yığırma (baş yığırma və ya seçmə yığırma) daxil olan verilənlərin (obyektlərin) sayına bu yığımın həcmi deyilir. Məsələn, 1000 detaldan yoxlamaq üçün 100 detal seçilibsə, onda baş yığımın həcmi $N=1000$ və seçmə yığımın həcmi isə $n=100$ olur.

Adətən baş yığımın obyektlərin sayı seçmə yığımın obyektlərin sayından qat-qat çox olur.

§3.3. Statistik verilənlərin təsvir olunma və emal üsulları

Statistik verilənlərin təsviri və emalı üsullarından aşağıdakıları qeyd edək:

- *Orta qiymətlər üsulu*. Bu üsul statistik verilənlərin təhlil edilməsinə imkan verən bəzi orta göstəricilərin alınması üçün nəzərdə tutulur.

- *Interval üsulu*. İlk ədədi verilənlərin intervallara bölünməsinə əsaslanır.

- *Qrafik üsul*. Bəzi ilkin verilənlər və onların tədqiqat nəticələrinin koordinat müstəvisində qrafiki olaraq göstərilməsi üçün nəzərdə tutulur.

Əlamətin müşahidə olunan konkret qiyməti *variant* adlanır. Başqa sözlə, müşahidə olunan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ qiymətlərindən hər biri *variant* adlanır.

Əgər müşahidə olunan ayrı-ayrı qiymətləri artma sırası ilə düzsək, onda aydındır ki, bu sıranın bir elementindən digərinə keçərkən görürük ki, baxılan qiymət

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

dəyişir. Müşahidə olunan qiymətin bu cür dəyişməsi *variasiya* adlanır. Həmin sıraya isə *variasiya sırası* deyilir.

Yeni variantların artma sırası ilə yazılış ardıcılığına *variasiya sırası* deyilir. Məsələn, müşahidə olunan

5, 1, 0, 1, 7, -2, 10, 7, 4

qiymətləri (variantlar) artma ardıcılığı ilə düzsək aşağıdakı variasiya sırasını alarıq: -2, 0, 1, 1, 4, 5, 7, 7, 10.

Variasiya sırası hər hansı kəmiyyət əlamətinin dəyişməsini göstərir.

Tutaq ki, müəyyən baş yığımından tədqiq olunmaq üçün götürülmüş həcmi n -ə bərabər olan seçmə yığma baxılır. Bu seçmə yığımında müəyyən x_1 qiyməti n_1 dəfə, x_2 qiyməti n_2 dəfə və s. x_k qiyməti n_k dəfə müşahidə olunarsa, onda $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$ ədədinə *seçmə yığımının həcmi* deyilir.

Müşahidələrin saylarını göstərən $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ *ədədlərinə* $x_1, x_2, \dots, x_k$ qiymətlərinin uyğun *tezlikləri* deyilir. Tezliklərin seçmə yığımının həcminə olan nisbətlərinə, yəni,

$$\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \frac{n_3}{n}, \dots, \frac{n_k}{n}$$

nisbətlərinə $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ qiymətlərinin uyğun *nisbi tezlikləri* deyilir. Nisbi tezlikləri ümumi şəkildə

$$\frac{n_i}{n} = w_i$$

ilə işarə edək.

Bütün nisbi tezliklərin cəmi vahidə bərabərdir:

$$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n} + \dots + \frac{n_k}{n} = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Ardıcıl $(x_1; n_1), (x_2; n_2), \dots, (x_k; n_k)$ cütlərinə statistik sıra deyilir. Bu sıranı cədvəl şəklində də vermək olar. Belə ki,

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

seçməyə daxil olan qiymətləri (və ya müşahidə olunan ayrı-ayrı qiymətləri) artma sırası ilə düzsək və hər bir qiymətin bu yığında rastgəlmə (təkrarlanma) tezliyini göstərsək, onda *seçmənin statistik paylanma sırasını* alarıq.

Başqa sözlə, seçməyə daxil olan bütün variantlar və onların müvafiq tezlikləri və ya nisbi tezlikləri siyahısına *seçmənin statistik paylanması* deyilir. Beləliklə, *seçmənin statistik paylanma* sırası iki sətirdən ibarət olan cədvəl şəklində verilir. Bu cədvəlin birinci sətirində qiymətlər (variantlar), ikincisində isə onların müvafiq tezlikləri əks olunur (cədvəl 1).

Cədvəl 1

<i>Qiymətlər</i>	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_k
<i>Tezliklər</i>	n_1	n_2	n_3	...	n_i	...	n_k

Bu cədvəldə verilmiş tezlikləri müvafiq nisbi tezliklərlə əvəz etsək aşağıdakı cədvəli – nisbi tezliklərin paylanma cədvəlini alarıq (cədvəl 2):

Cədvəl 2

<i>Qiymətlər</i>	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_k
<i>Nisbi tezliklər</i>	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_i}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

Seçmə paylanmasının əks olunduğu bu cədvəli ehtimal nəzəriyyəsində (2-ci fəsil §2.7) baxdığımız təsadüfi kəmiyyətin paylanmasının əks olunduğu cədvəllə müqayisə edə bilərik. Həmin cədvəldə təsadüfi kəmiyyətin paylanması onun bütün qiymətləri və müvafiq ehtimalları göstərilməklə verilir. Baxdığımız sonuncu cədvəldə isə seçmənin statistik paylanmasını vermək üçün seçməyə daxil olan bütün qiymətlər və onların müvafiq tezlikləri (və ya nisbi tezlikləri) göstərilir.

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

Adətən müşahidə nəticəsində alınan verilənlər çoxlu sayda nizamsız ədədlər yığımından ibarət olur. Belə ədədlər çoxluğuna baxarkən onların hansı qanunauyğunluqla dəyişdiyini üzə çıxarmaq çətinidir. Odur ki, təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin dəyişmə qanunauyğunluğunu öyrənmək üçün sınaq verilənlərini artma və ya azalma istiqamətində düzmək lazımdır.

Tutaq ki, aparılan müşahidələr zamanı məlum olub ki, birinci semestr ərzində tələbələrin 10 ballıq sistemdə aldığı qiymətlər belədir: 6; 8; 7; 6; 8; 9; 7; 8; 6; 7; 8; 6; 8; 7; 8; 9; 7; 8; 7; 8; 7; 8; 6; 8; 6; 7; 8; 8; 7; 9.

Başqa sözlə, bunlar X təsadüfi kəmiyyətinin qiymətləri olur. Onda X diskret təsadüfi kəmiyyətdir. Yəni X -in bu qiymətləri statistik (müşahidə olunan) verilənlərdir.

Bu göstərilən qiymətləri artma ardıcılığı ilə düzsək, nəticələr dörd qrupda sıralanmış olar:

666666777777777888888888888999.

Sıradakı hər bir qrupda olan qiymətlər yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi variantlardır.

Bu misalda seçmə yığımın həcmi $n=6+9+12+3=30$ olduğundan müvafiq nisbi tezlikləri hesablayaraq seçmənin

statistik paylanma cədvəlini tərtib edə bilərik. Yəni $w_i = \frac{n_i}{n}$

($i=1,2,3,4$) düsturu ilə tapırıq:

$$w_1 = 6/30 = 0,2; \quad w_2 = 9/30 = 0,3;$$

$$w_3 = 12/30 = 0,4; \quad w_4 = 3/30 = 0,1.$$

Müvafiq paylanma cədvəlini qururuq (cədvəl 3). Cədvəldən görünür ki, nisbi tezliklərin cəmi $0,2 + 0,4 + 0,3 + 0,1=1$ olur.

Cədvəl 3

x_i	6	7	8	9
n_i	6	9	12	3
$w_i=n_i/n$	0,2	0,3	0,4	0,1

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

M i s a l 1. Həcmi $n=25$ olan seçmənin tezliklərinin paylanması verilib (cədvəl 4).

Nisbi tezliklərin paylanmasını
yazın.

Cədvəl 4

x_i	2	6	12	14
n_i	3	10	7	5

H ə l l i. Əvvəlcə nisbi tezlikləri tapaq. Bunun üçün aydındır ki, tezlikləri seçmənin həcminə bölmək lazımdır.

Onda $n=n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 3+10+7+5=25$ olduğundan
 $w_i = n_i / n$ ($k=1,2,3,4$) düsturu ilə hesablayırıq:

$$w_1 = 3/25 = 0,12; \quad w_2 = 10/25 = 0,4;$$

$$w_3 = 7/25 = 0,28, \quad w_4 = 5/25 = 0,2$$

İndi nisbi tezlikləri növbəti cədvələ yazmaq olar (cədvəl 5):

Cədvəl 5

x_i	2	6	2	14
$w_i = n_i / n$	0,12	0,4	0,28	0,2

$$\text{Yoxlama: } 0,12 + 0,4 + 0,28 + 0,2 = 1.$$

Statistik paylanmanı həm də intervallar ardıcılığı şəklində və müvafiq tezliklərilə (kəsilməz paylanma) vermək olar. Bu halda hər bir intervala uyğun tezlik bu intervala düşən tezliklərin cəminə bərabər olur.

Ehtimal nəzəriyyəsində paylanma dedikdə təsadüfi hadisənin mümkün qiymətləri ilə onların ehtimalları arasında uyğunluq başa düşülür. Riyazi statistikada isə paylanma dedikdə müşahidə olunan variantlarla onların tezlikləri (və ya nisbi tezlikləri) arasında uyğunluq nəzərdə tutulur.

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

§3.4. Seçmənin qrafik təsviri. Poliqon və histqram.

Statistik paylanmaları əyani olaraq göstərmək üçün variasiya sıralarının qrafik təsvirlərindən istifadə edilir. Variasiya sıralarının ən sadə qrafik təsvirləri *poliqon* və *histqram* adlanır.

Poliqon təsadüfi kəmiyyətlərin ehtimalının sıxlığını göstərən qrafik təsvir üsullarından biridir və sınıq xətt şəklində əks olunur. Buna bəzən paylanma çoxbucaqlısı da deyirlər.

Paylanma poliqonu (paylanma çoxbucaqlısı) bir qayda olaraq düzbucaqlı koordinat sistemində qurulur. Belə ki, müşahidə olunan qiymətlər absis oxu üzərində, tezliklər (və ya nisbi tezliklər) isə ordinat oxu üzərində qeyd olunur. Adətən poliqonlar ən çox diskret variasiya sıralarının təsviri üçün tətbiq edilir. Bununla yanaşı onları intervallı sıralara da tətbiq etmək olar. Bu halda absis oxu üzərində əvvəlkindən fərqli olaraq verilmiş intervalların orta nöqtələri qeyd edilir.

Beləliklə, tutaq ki, müəyyən bir X seçmə yığımı kəmiyyət əlamətinə görə tədqiq edilir və X diskret təsadüfi kəmiyyətdir. Əvvəlcə alınmış bütün ədədi verilənləri (qiymətləri) onların artma ardıcılığı ilə düzək, yəni adi nizamsız statistik sıradan variasiya sırasını alaq. Bu sırada sadəcə olaraq x_1 -in qiymətinin n_1 dəfə, x_2 -nin qiymətinin n_2 dəfə, ..., x_k -nin qiymətinin n_k dəfə təkrarlandığı aydın görünür. Belə ki, tezliklərin cəmi seçmə yığımın həcminə bərabərdir:

$$\sum_{i=1}^k n_i = n .$$

İndi isə bu verilənlər əsasında x_i – lərin artma ardıcılığı ilə verilmiş müxtəlif qiymətləri, bu qiymətlərin təkrarlanmalar da nəzərə alınmaqla sayı (tezlikləri) n_i - və nəhayət,

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

qiymətlərin nisbi tezlikləri, yəni tezliklərin seçmə yığımın həcminə olan nisbətləri $n_i/n=w_i$ əks olunmuş aşağıdakı cədvəl tərtib edək (cədvəl 6).

Cədvəl 6

Qiymətlər x_i ($x_1 < x_2 < \dots < x_k$)	x_1	x_2	x_3	...	x_k	Yoxlama
Tezlik n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_k	$\sum_{i=1}^k n_i = n$
Nisbi tezlik $w_i = \frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$	$\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} = 1$

Sonuncu cədvəl X diskret təsadüfi kəmiyyəti üçün variasiya sırasının ümumi şəklidir.

Yadıma salaq ki, ehtimal nəzəriyyəsində diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanması dedikdə təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri ilə onların ehtimalları arasında uyğunluq nəzərdə tutulur. Riyazi statistikada diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanması dedikdə isə müşahidə olunan qiymətlərlə (variantlarla) x_i onların tezlikləri və ya nisbi tezlikləri arasındakı uyğunluq başa düşülür.

Tezliklər poliqonunu qurmaq üçün absis oxu üzərində x_i -lər, ordinat oxu üzərində isə onların müvafiq tezlikləri qeyd olunur və $(x_i; n_i)$ nöqtələri qurularaq düz xətt parçaları ilə birləşdirilir. Nəticədə

$$(x_1; n_1), (x_2; n_2), (x_3; n_3), \dots, (x_k; n_k). \quad (1)$$

nöqtələrini ardıcıl olaraq birləşdirən düz xətt parçalarından ibarət bir sınıq xətt əmələ gəlir. Həmin sınıq xəttə statistikada *tezliklər poliqonu* deyilir.

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

Və ya təpələri (1) nöqtələrində olan sınıq xəttə *tezliklər poliqonu* deyilir. Eyni ilə

$$(x_1; \frac{n_1}{n}), (x_2; \frac{n_2}{n}), (x_3; \frac{n_3}{n}), \dots, (x_k; \frac{n_k}{n}) \quad (2)$$

nöqtələrini ardıcıl olaraq birləşdirən parçaların əmələ gətirdiyi sınıq xəttə *nisbi tezliklər poliqonu* deyilir.

Və ya təpələri (2) nöqtələrində olan sınıq xəttə *nisbi tezliklər poliqonu* deyilir.

Bu deyilənlərə misal üzərində baxaq.

Tutaq ki, müəyyən bir bölgədə onuncu sinif şagirdlərinin riyaziyyatdan bilik səviyyəsini yoxlamaq üçün məktəblərdə altı məsələdən ibarət olan xüsusi bir yoxlama yazı işi keçirilməsi tələb olunur.

Aydındır ki, dəqiq nəticələr alınması üçün həmin bölgədəki bütün məktəblilərin bu yoxlama yazı işini yazması lazımdır. Lakin həmin bölgənin bütün məktəblərində eyni vaxtda bu işin yerinə yetirilməsi, yazı işlərinin yoxlanılması və alınan nəticələrin işlənməsi mümkün olsa da, böyük zəhmət tələb edən ağır işdir. Lakin statistika elmi bizə yalnız müəyyən sayda məktəblilərin bilik səviyyəsini yoxlamaqla kifayətlənərək, yəni seçmə yığımı tədqiq etməklə tələb olunan məsələ ilə bağlı doğru və düzgün məlumat əldə etməyə imkanı verir. Belə hallarda adətən baş yığımın yalnız 5-10 faizini tədqiq etməklə kifayətlənilir. Lakin bu halda məktəblilərin hər birinin baş yığımdan seçmə yığıma düşmə şansının eyni olması təmin edilməlidir.

Belə statistik tədqiqat aparmaqla əldə olunan bəzi nəticələri nəzərdən keçirək. Məsələn, tutaq ki, baxılan bölgədəki məktəblərdə 700 nəfər onuncu sinif şagirdi var və bunlardan isə təsadüfi olaraq yalnız 50 nəfər seçildi.

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

Bu 50 nəfər şagirdin əlifba üzrə siyahısında hər birinin familiyası qarşısında düzgün həll olunmuş məsələlərin sayını yazdılar. Nəticədə aşağıdakı ədədlər ardıcılığı alındı: 4;2;0;6;2;3;4;3;3;0;1;5;2;6;4;3;3;2;3;1; 3;3;2; 6;2;2;4;3;3;6;4;2;0;3;3;5;2;1;4;4;3;4;5;3;2;3;1;6;2;2.

Belə nizamsız halda yazılmış ədədlər sırası əsasında məktəblilərin yazı işləri haqqında müəyyən bir nəticə çıxarmaq çətinidir. Bu nəticələrin təhlilinin asan olması üçün həmin qiymətləri artma ardıcılığı ilə düzülər. Nəticədə qiymətlər sırası aşağıdakı şəkllə düşür:

0;0;0;1;1;1;1;2;2;2;2;2;2;2;2;2;2;3;3;3;3;3;3;3;3;3;3;3;3;3;3;3;3;3;4;4;4;4;4;4;4;4;5;5;5;5;6;6;6;6.

Buradan görünür ki, ədədlər sırası 7 qrupa bölünüb. Hər bir qrup isə konkret bir nəticəni bildirir. O cümlədən, I qrup-heç bir məsələ həll edilməyib, II qrup-bir məsələ həll edilib, III qrup-iki məsələ həll edilib və s.

Aydın olur ki, “10-cu sinif şagirdi heç bir məsələni həll etməyib” hadisəsinin baş vermə tezliyi 3-ə bərabərdir. Bu hadisənin nisbi tezliyi onun tezliyinin seçmənin həcminə olan nisbətində bərabərdir: $x_1 : n = 3 : 50 = 0,06$ və ya 6%.

Eləcə də “10-cu sinif şagirdi bir məsələni həll edib” hadisəsinin baş vermə tezliyi 4-ə, bərabərdir, nisbi tezlik isə $x_2 : n = 4 : 50 = 0,08$, və ya 8% və s.

Nəticələrin daha asan başa düşülməsi üçün onları cədvəl və qrafik formada təqdim edirlər. Məsələn, cədvəl tərtib edərkən çox asanlıqla *bütün tezlikləri toplayaraq seçmənin həcminə bərabər olan 50 ədədini alırıq*. Eləcə də *bütün nisbi tezlikləri topladıqda 1 və ya 100% almalıyıq*. Analoji hesablamaları bütün x_i –lər üçün apararaq nəticələri cədvələ yazsaq alırıq (Cədvəl 7):

Əgər biz onuncuların hər birinin baş yığımından seçmə yığımına düşmə ehtimalının eyni olduğunu fərz etsək, onda 50

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

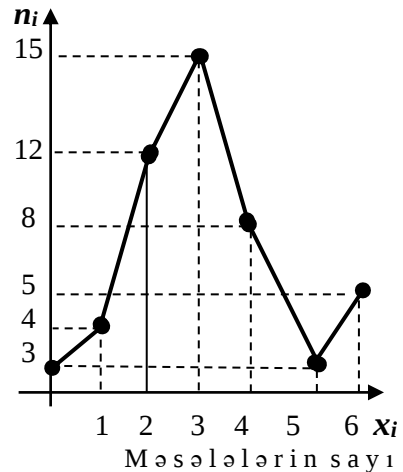
Cədvəl 7

Qiymətlər x_i	0	1	2	3	4	5	6	Yoxlama
Tezliklər n_i	3	4	12	15	8	3	5	$n = \sum_{i=1}^k n_i = 50$
$w_i = \frac{n_i}{n}$	0,06	0,08	0,24	0,3	0,16	0,06	0,1	$\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} = 1$

nəfər üçün alınmış nəticələrə əsaslanaraq bütün onuncuların bilik səviyyəsi haqqında əminliklə fikir söyləyə bilərik.

Məsələn, cədvəldən görünür ki, seçmə yığımın 10%-ini təşkil edən şagirdlər bütün məsələləri həll edib. Deməli, gözləmək olar ki, 700 məktəblinin də təxminən 10%-i bütün məsələləri həll edə biləcək. Bu da o deməkdir ki, bölgədəki məktəblərdən təxminən 70 nəfər onuncu sinif şagirdi yüksək səviyyəli riyazi hazırlığa malikdir.

Eyni zamanda alınan nəticələrə əsasən hesab etmək olar ki, məktəbli ən azı iki məsələni düzgün həll edibsə, onda bu şagird riyaziyyatdan tələb olunan minimum bilik səviyyəsinə çatıb. Seçmə yığımında belələrinin sayı $12+15+8+3+5=43$ nəfərdir ki, bu da ümumi həcmnin 86%-ini təşkil edir. Deməli, belə bir nəticəyə gəlmək olar ki, bölgədəki məktəblərdə bütün onuncu sinif şagirdlərinin təxminən 86%-i riyaziyyatdan minimum bilik səviyyəsinə malikdir. Bunların arasında

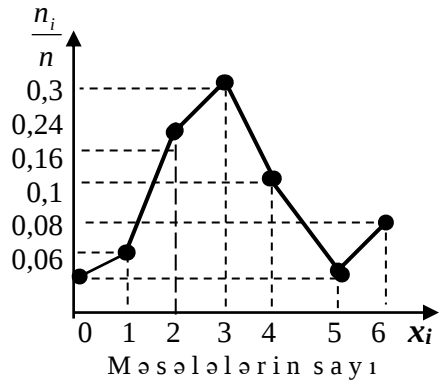


Şək. 1. Tezliklər poliqonu

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

isə təxminən 32% şagird (ən azı 4 məsələni düzgün həll edənlər) yaxşı riyazi hazırlığa malikdir. Cədvəl 7-dən istifadə etməklə tezliklər poliqonu qurulur (şəkil 1).

Statistik verilənlərin bu cür təsvir olunması çox və ya az ehtimallı qiymətləri təyin etməyə imkan verir. Eyni qayda ilə nisbi tezliklər poliqonunu da qurmaq olar. Bu halda da cədvəl 7-dən istifadə edilir. Belə ki, absis oxu üzərində yenə məsələlərin sayı, ordinat oxu üzərində isə nisbi tezliklər $n_i/n = w_i$ qeyd edilir və qurulmuş nöqtələr parçalarla birləşdirilir. Bununla da nisbi tezliklər poliqonu qurulmuş olur (şəkil 2).



Şək. 2. Nisbi tezliklər poliqonu

M i s a l 1. Seçmə yığım verilir: {4, 1, 3, 1, 3, 2, 4, 1, 1, 2, 4, 0, 1, 2, 1, 0, 2, 1, 3, 2}.

Bu seçmə yığma uyğun statistik sıranı yazın.

H ə l l i. Seçmənin həcmi $n=20$ -dir. Seçmə yığımın elementlərini artma sırası ilə düzək: {0,0,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,3,3,3,4,4,4}. Tezlikləri hesablayıb, seçmə verilənləri aşağıdakı variasiya sırası şəklində göstərə bilərik (cədvəl 8):

Cədvəl 8

x_i	0	1	2	3	4
n_i	2	7	5	3	3
$w_i = n_i / n$	0,1	0,35	0,4	0,15	0,15

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

M i s a l 2: Seçmə paylanması belə bir cədvəl şəklində verilir (cədvəl 9):

Bu paylanmaya görə tezliklər poliqonunu qurun.

Cədvəl 9

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

H ə l l i. Absis oxu üzərində x_i qiymətlərini, ordinat oxu üzərində isə onların uyğun n_i tezliklərini qeyd edərək (x_i, n_i) nöqtələrini quraq və onları düz xətt parçaları ilə birləşdirək. Bu halda tələb olunan tezliklər poliqonu alınır (şəkil 3):

Seçmə yığımın həcmi böyük olduqda paylanma haqqında daha əyani təsəvvür almaq üçün *histoqramdan* istifadə edilir.

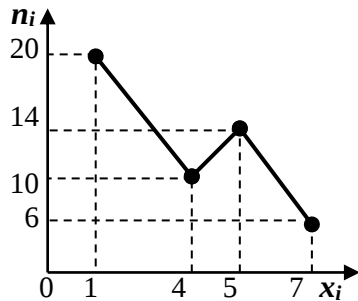
Tezliklər histoqramı şaquli düzbucaqlılardan ibarət olan pilləvari bir fiqur, xüsusi bir diaqramdır.

Belə ki, bu düzbucaqlılar uzunluğu l olan intervallar üzərində qurulur və onların hündürlükləri isə $\frac{n_i}{l}$ nisbətinə (tezliklərin sıxlığı) bərabərdir.

Beləliklə, tezliklər histoqramını qurmaq üçün əvvəlcə tədqiq olunan bütün qiymətlər uzunluqları eyni (l) olan intervallara bölünür. Alınan intervalların sayı isə 5-dən az və 25-dən çox olmamaq şərtlə aşağıdakı düsturla tapılır:

$$k = \sqrt{n} \text{ və ya } k \approx 1 + 3,32 \lg n = 1 + \log_2 n,$$

burada n – seçmə yığımın həcmidir və $\log_2 n \approx 3,322 \lg n$. Qeyd etdiyimiz kimi intervalların uzunluqları eynidir və belə hesablanır:



Şəkil 3. Tezliklər poliqonu

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

$$l = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k},$$

burada $x_{\max}$ və $x_{\min}$ seçmə yığımıdakı ən böyük və ən kiçik qiymətlərdir. Əgər l -in qiyməti kəsr ədəd alınarsa, onda intervalın uzunluğu üçün ən yaxın tam ədəd və ya ən yaxın kəsr ədəd götürülür. Birinci intervalın başlanğıcı belə hesablanır:

$$x_0 = x_{\min} - \frac{l}{2}.$$

Beləliklə, intervalların sərhəd qiymətləri tapılır:

$$x_0 = x_{\min} - l/2, x_1 = x_0 + l, x_2 = x_1 + l, x_3 = x_2 + l, \dots, x_{\max} = x_k.$$

Nəhayət, intervalların hər birində müşahidə olunan qiymətlərin sayı, yəni tezliklər (n_i) və tezliklərdən istifadə etməklə nisbi tezliklər $w_i = n_i / n$ hesablanır. Alınan intervallar və onlara müvafiq tezliklər və nisbi tezliklər cədvələ daxil edilir (cədvəl 10). Bu cədvəl tezliklər və nisbi tezliklərin *intervallı statistik paylanma sırası* adlanır.

Interval	$[x_0, x_1]$	$[x_1, x_2]$	...	$[x_{k-1}, x_k]$
Tezlik n_i	n_1	n_2	...	n_k
Nisbi tezlik $w_i = n_i / n$	n_1 / n	n_2 / n	...	n_k / n

Qeyd olunan hesablamalar aparıldıqdan sonra tezliklər histoqramını qurmaq üçün absis oxu üzərində hər bir intervalın sərhəd qiymətləri qeyd olunur və həmin intervallar üzərində hündürlüyü $h_i = n_i / l$ (intervallardakı tezliklərin sıxlığı) olan düzbucaqlılar qurulur. Aydın ki, i -ci düzbucaqlının sahəsi $l \cdot \frac{n_i}{l} = n_i$ -yə, yəni i -ci intervaldakı qiymətlərin sayına bərabər olur. Buradan isə alınır ki, tezliklər histoqramının sahəsi bütün intervallar üçün

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

tezliklərin cəminə bərabərdir. Başqa sözlə, tezliklər histoqramının sahəsi seçmənin həcminə bərabərdir.

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ olur. Eləcə də $n_1/n + n_2/n + \dots + n_k/n = 1$ (və ya 100%) olur.

Beləliklə, tezliklər histoqramı düzbucaqlılardan ibarət olan pilləvari fiqurdur. Bu düzbucaqlıların oturacaqları absis oxu üzərində intervalların uzunluğuna bərabər olan parçalar

l , hündürlüyü isə $h = \frac{n_i}{l}$ uzunluqlu parçalardır. Burada n_i i -ci intervala düşən seçmə qiymətlərin tezliklərinin cəmidir.

Tərifdən aydındır ki, tezliklər histoqramının sahəsi seçmənin həcminə bərabərdir.

M i s a l 3: Tələbələr arasından təsadüfi seçilmiş 30 nəfərin boylarının uzunluğu üçün aşağıdakı ədədlər alınmışdır:

178, 160, 154, 183, 155, 153, 167, 186, 163, 155,
157, 175, 170, 166, 159, 173, 182, 167, 171, 169,
179, 165, 156, 179, 158, 171, 175, 173, 164, 172.

Tezliklərin intervallı statistik paylanma sırasını və tezliklər histoqramını qurmalı.

H ə l l i. Övvəlcə sıranı elementlərinin artma ardıcılığı ilə yazaq:

153, 154, 155, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 163,
164, 165, 166, 167, 167, 169, 170, 171, 171, 172,
173, 173, 175, 175, 178, 179, 179, 182, 183, 186.

Bu sıradan göründüyü kimi $x_{\min} = 153$ və $x_{\max} = 186$. Odur ki, $n=30$ olduğunu nəzərə alaraq intervalların sayını və uzunluğunu tapaq: $k = \sqrt{n} = \sqrt{30} \approx 5,47 \approx 6$

$$l = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{186 - 153}{6} = 5,5.$$

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

Yəni intervalların uzunluğu $l=5,5 \approx 6$ olur. Onda birinci intervalın başlanğıcı belə olacaq:

$$x_0 = x_{\min} - l/2 = 153 - 6/2 = 150.$$

İntervalların sayını $k=6$ götürək. Deməli, seçmə verilənlər 6 intervala bölünür:

[150, 156), [156, 162), [162, 168),

[168, 174), [174, 180), [180, 186].

Bu intervalların hər birinə düşən tələbələrin sayını n_i təkrarlanmalar da nəzərə alınmaqla hesablayaraq tezliklərin intervallı statistik paylanma sırasını qururuq (cədvəl 11).

Bu cədvəl əsasında tezliklər histqramını qurmaq olar.

Cədvəl 11

İnterval	[150, 156)	[156, 162)	[162, 168)	[168, 174)	[174, 180)	[180, 186]
n_i	4	5	6	7	5	3
$h_i=n_i/l$	4/6	5/6	1	7/6	5/6	3/6

Bunun üçün absis oxu üzərində intervalların sərhəd qiymətlərini, ordinat oxu üzərində isə $h_i = \frac{n_i}{l}$ qiymətlərini

(tezliklərin sıxlığını) qeyd edərək $(x_i, \frac{n_i}{l})$ nöqtələrini quraq və düz xətt parçaları ilə birləşdirək. Nəticədə tezliklər histqramını alırıq (şəkil 4).

Nəhayət, qurulmuş histqramın sahəsinin seçmə yığımın həcminə bərabər olduğunu görürük:

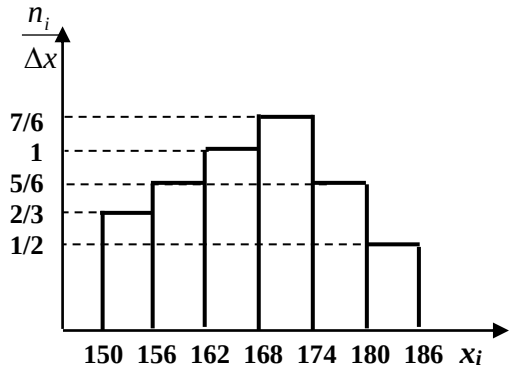
$$l \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5) = 6(4/6 + 5/6 + 1 + 7/6 + 5/6 + 3/6) = 4 + 5 + 6 + 7 + 5 + 3 = 30.$$

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

M i s a l 4. Elektrik şəbəkəsində gərginliyi ölçərkən (voltmetrlə) aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

218, 221, 215, 225,
225, 217, 224, 220,
220, 219, 221, 219,
222, 227, 218, 220,
223, 230, 223, 216,
224, 227, 220, 222.

Tezliklər histoqramını qurun.



Şəkl.4. Tezliklər histoqramı

H ə l l i. Seçmə verilənləri artma sırası ilə düzək:

215, 216, 217, 218, 218, 219, 219, 220,
220, 220, 220, 221, 221, 222, 222, 223,
223, 224, 224, 225, 225, 227, 227, 230.

Sıradan görünür ki, $x_{\min} = 215$ və $x_{\max} = 230$. Ona görə də $n=24$ olduğunu nəzərə alaraq intervalların sayını və uzunluğunu tapaq:

I. Intervalların sayı - $k = \sqrt{n} = \sqrt{24} \approx 4,9 \approx 5,$

II. Intervalların uzunluğu -

$$l = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{230 - 215}{5} = 3.$$

Deməli, seçmə verilənlər hər birinin uzunluğu $l=3$ olan aşağıdakı 5 intervala bölünür:

[215,218), [218,221), [221,224), [224,227), [227,230]

Bu intervalların hər birindəki seçmə qiymətlərin n_i sayını (tezlikləri) təkrarlanmaları da nəzərə almaqla tapaq. Həmçinin histoqramı əmələ gətirən düzbucaqlıların

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

hündürlüklərini $h_i = n_i / l$ düsturu ilə taparaq alınan nəticələri aşağıdakı cədvələ daxil edək (cədvəl 12).

Cədvəl 12

İnterval	[215,218)	[218, 221)	[221,224)	[224,227)	[227,230]
Tezlik	3	8	6	4	3
$h_i = n_i / l$	1	8/3	2	4/3	1

Nəhayət, cədvələ daxil edilmiş verilənlərə görə histogramı qurmaq olar (şəkil 5).

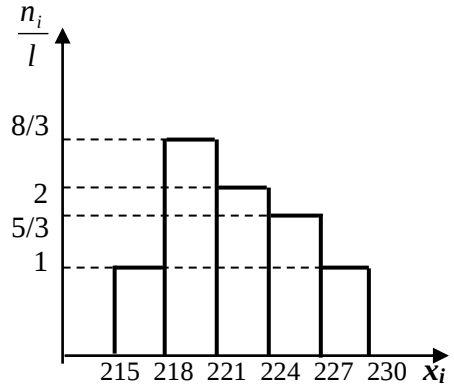
Sonda qurulmuş histogramın sahəsinin seçmə yığımın həcminə bərabər olduğunu görürük:

$$l \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5) = 3(1 + 8/3 + 2 + 4/3 + 1) = 24.$$

Nisbi tezliklər

histogramı da analoji qayda ilə qurulur. Nisbi tezliklər histogramı əvvəlki histogramdan onunla fərqlənir ki, bu halda qurulan düzbucaqlıların hündürlükləri $h_i = w_i / l$ nisbətində bərabərdir,

yəni $h_i = \frac{n_i}{nl}$, burada



Şək. 5. Tezliklər histogramı

$l = x_{i+1} - x_i$ və $w_i = \frac{n_i}{n}$ -dir. Həmçinin bu halda i -ci düzbucaqlının sahəsi i -ci intervala düşən qiymətlərin nisbi tezliyinə bərabər olur:

$$S_i = h_i \cdot l = \frac{w_i}{l} \cdot l = w_i,$$

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

burada w_i seçmə variantın i -ci intervala düşməsinin nisbi tezliyidir. Bütün histqramın sahəsi isə intervallar üçün nisbi tezliklərin cəminə, yəni vahidə bərabərdir:

M i s a l 5. Müşahidə nəticəsində müəyyən X təsadüfi kəmiyyətinin təyin olunmuş qiymətləri (cədvəl 13) verilir. Nisbi tezliklər histqramını qurmalı.

Cədvəl 13

İnterval	[3,5;4,5)	[4,5;5,5)	[5,5;6,5)	[6,5;7,5)	[7,5;8,5)	[8,5;9,5]
Tezlik	6	13	25	16	11	9

H ə l l i. Histqramı qurmaq üçün verilənləri cədvələ yerləşdirək. Verilənlərdən görünür ki, $n = \sum n_i = 80$.

Həm də intervalların uzunluğu $l = 1$. Odur ki, müvafiq hesablamaları apararaq nəticələri aşağıdakı cədvələ daxil edək (cədvəl 14). Nəhayət, bu cədvəldəki verilənlərdən istifadə edərək nisbi tezliklər histqramını qurmaq olar.

Cədvəl 14

İntervallar (x_{i-1}, x_i)	Tezliklər (x_i – lərin sayı) n_i	Nisbi tezliklər $w_i = n_i / n$	$h_i = n_i / nl$
[3,5;4,5)	6	$6/80=0,075$	0,075
[4,5;5,5)	13	$13/80=0,1625$	0,1625
[5,5;6,5)	25	$25/80=0,312$	0,3125
[6,5;7,5)	16	$16/80=0,2$	0,2
[7,5;8,5)	11	$11/80=0,1375$	0,1375
[8,5;9,5]	9	$9/80=0,1125$	0,1125

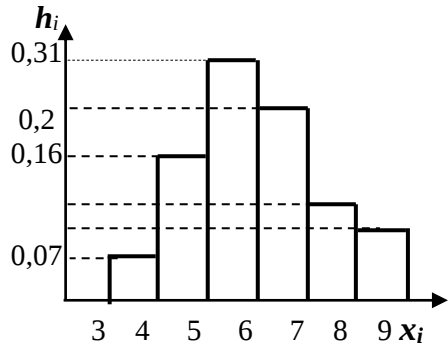
Bunun üçün yuxarıda göstərilən qayda ilə absis oxu üzərində x_i -ləri (intervalların sərhəd qiymətlərini), ordinat oxu üzərində isə $h_i = \frac{n_i}{nl}$ qiymətlərini (nisbi tezliklərin sıxlığı və ya düzbucaqlıların hündürlüyü) qeyd edərək (x_i, h_i)

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

nöqtələrini qurmaq və həmin nöqtələri düz xətt parçaları ilə birləşdirmək lazımdır.

Beləliklə, tələb olunan nisbi tezliklər histoqramı alınır (şəkil 6)

İndi isə nisbi tezliklərin cəmini yoxlamaq olar. Yəni hesablama apararaq tapırıq ki, nisbi tezliklərin cəmi vahidə bərabərdir.



Şəkl. 6. Nisbi tezliklər histoqramı

Doğrudan da $n_1/n+n_2/n+...+n_6/n=$
 $=0,075+0,1625+0,3125+0,2+0,1375+0,1125=1$ olur.

§3.5. Seçmənin ədədi xarakteristikaları

Variasiya sıraları və empirik paylanmaların qrafikləri seçmə yığımdakı verilənlərin qiymətlərinin necə dəyişməsi barədə əyani təsəvvür yaradır. Lakin onlar seçmənin tam xarakteristikasını vermək üçün kifayət deyildir. Bunun üçün ədədi xarakteristikalardan istifadə edilir.

Ədədi xarakteristikalar bir qayda olaraq müəyyən müşahidələr və ya ölçmələr nəticəsində alınan verilənlər (statistik verilənlər) üzrə hesablandığından, onları *seçmənin ədədi xarakteristikaları* və ya sadəcə olaraq *statistik xarakteristikalar* adlandırırlar.

Seçmənin ədədi xarakteristikaları empirik (təcrübələr və ya ölçmələr nəticəsində alınan) verilənlər haqqında kəmiyyət təsəvvürləri yaradır və onları bir-biri ilə müqayisə etməyə imkan verir. Ədədi xarakteristikaları adətən üç qrupa

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

bölmələr:

- yerləşmə xarakteristikaları;
- səpələnmə xarakteristikaları;
- empirik paylanmanın normal paylanmaya nəzərən vəziyyətini müəyyən edən ədədi xarakteristikalar.

Mühüm praktiki əhəmiyyəti olan ədədi xarakteristikalardan yerləşmə və səpələnmə xarakteristikaları, habelə onların praktiki hesablanmasına baxaq.

Adətən ədədi xarakteristikalardan bəzilərinin ətrafında yerdə qalanlar cəmləşmiş olurlar. Belə xarakteristikalar yerləşmə xarakteristikaları adlanır. Bunlara aiddir: *ədədi (hesabi) orta, moda, median* və s. Ədədi orta, moda və median ən çox istifadə olunan yerləşmə xarakteristikalarıdır.

1. Ədədi orta. Bir neçə ədədin ədədi ortası onların cəminin ədədlərin sayına bölünməsindən alınan qismətə deyilir. Ədədi ortaya statistikada *sadə hesabi orta* da deyirlər. Sadə hesabi orta bir neçə ədəd üçün mühüm xarakteristika olduğu kimi, həm də seçmənin mühüm xarakteristikalarından biridir.

Tutaq ki, həcmi n -ə bərabər olan

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (3)$$

seçmə yığımına baxılır. Bu seçməyə daxil olan qiymətlərin ədədi ortasına *seçmə orta* deyilir. Seçmənin bu ədədi xarakteristikası $\bar{x}$ ilə işarə edilir. Seçmə orta əsas yerləşmə xarakteristikasıdır və seçməyə daxil olan qiymətlərin paylanma mərkəzini göstərir.

Beləliklə, (3) seçmə yığımının ədədi ortası - *seçmə orta* sadə hesabi orta (ədədi orta) düsturu ilə hesablanır:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (4)$$

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

burada n – seçmə yığımın həcmi, x_i – isə seçmə yığımın i -ci elementinin qiymətidir.

Əgər $x_1, x_2, \dots, x_k$ qiymətlərinin tezlikləri müvafiq olaraq $n_1, n_2, \dots, n_k$ – ya bərabədirsə və $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ olarsa, o halda (4) düsturu aşağıdakı şəkllə düşür (5):

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{\sum_{i=1}^k n_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i \quad (5)$$

Bu düstura *çəkili orta* qiymət düsturu da deyilir.

M i s a l 1. 5, 6, 4, 3, 2, 3, 0, 8, 8, 4 seçmə yığımı üçün seçmə ortanı tap.

H ə l l i. Misaldan görünür ki, seçmə yığımın həcmi

$n=10$ - dur. Odur ki, seçmə orta (4) düsturu ilə tapılır:

$$\bar{x} = \frac{5 + 6 + 4 + 3 + 2 + 3 + 8 + 8 + 4}{10} = 4,3.$$

M i s a l 2. Aşağıdakı statistik sıra şəklində verilmiş seçmə yığım üçün seçmə ortanı tap:

x_i	1	3	4	6	8	12
n_i	2	3	1	2	2	1

H ə l l i. Qiymətlərin tezliklərini nəzərə alaraq müəyyən edirik ki, seçmə yığımın həcmi $n=11$ -dir və tezliklərin cəmi seçmə yığımın həcminə bərabərdir:

$$2+3+1+2+2+1=11.$$

Beləliklə, bu halda (5) düsturundan istifadə edərək seçmə ortanı aşağıdakı kimi tapırıq:

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

$$\bar{x} = \frac{2*1 + 3*3 + 1*4 + 2*6 + 2*8 + 1*12}{11} = 5.$$

M i s a l 3. Aşağıdakı verilənlərə görə tikiş fabrikində çalışan fəhlələrin orta aylıq əməkhaqqını hesablayın.

Bir fəhlənin əməkhaqqı (yüz manatla)	Fəhlələrin sayı
2,8	30
3,4	22
3,0	18
3,8	10
Cəmi:	80

H ə l l i. Orta əməkhaqqını bütün əməkhaqqlarının cəmini fəhlələrin ümumi sayına bölməklə tapmaq olar. Yəni (5) düsturundan istifadə edərək tapırıq:

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = \frac{84,0 + 74,8 + 54,0 + 38,0}{30 + 22 + 18 + 10} = \frac{250,8}{80} = 3,135$$

2. Median. Statistik verilənlərin variasiya sırasının bu sıranı iki bərabər hissəyə bölən elementinə median deyilir. Belə ki, bu halda sıranın birinci yarısına daxil olan elementlərin sayı ikinci yarısına daxil olan elementlərin sayına bərabərdir. Həm də sıranın birinci yarısına daxil olan bütün elementlər həmin elementdən kiçik və ikinci yarısına daxil olan elementlər isə böyük olur. Median adətən «Me» ilə işarə edilir.

Statistik verilənlər az olduqda (seçmə yığımın həcmi böyük olmadıqda) medianın hesablanması çox sadə olur. Bu halda statistik verilənlərin variasiya sırası n sayda elementdən ibarətdirsə, əvvəlcə bu elementlər artma və ya azalma sırası ilə nizamlanır və bundan sonra medianın sıra nömrəsi (R_{Me} rəqəmi) aşağıdakı kimi hesablanır:

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

$$R_{Me} = \frac{n+1}{2}$$

Tutaq ki, seçmə yığımın elementlərinin sayı (seçmə yığımın həcmi) tək ədəddir $n=11$ və seçmə yığım belə bir sıra şəklində verilib: 5, 7, 7, 7, 11, 12, 15, 15, 20, 24, 30.

Onda bu sıra üçün medianın rəngi

$$R_{Me} = \frac{n+1}{2} = \frac{11+1}{2} = 6$$

olur və ona görə də median sıranın 6-cı həddi ilə üst-üstə düşür: $Me = 12$.

Seçmə yığımın elementlərinin sayı cüt ədəd olduqda isə median yuxarıda göstərilən dəqiqliklə təyin oluna bilmir. Yəni bu halda medianın rəngi kəsir ədədlə ifadə olunur. Məsələn, tutaq ki, baxılan variasiya sırası $n=10$ elementdən ibarətdir: 4, 6, 10, 10, 13, 15, 19, 23, 25, 33.

Odur ki, bu halda medianın rəngi

$$R_{Me} = \frac{10+1}{2} = 5,5$$

olur. Yəni median sıranın 5-ci və 6-cı elementləri (13 və 15) arasında olmalıdır. Deməli, median həmin elementlərin ədədi ortasına bərabər olur:

$$Me = \frac{13+15}{2} = 14$$

Beləliklə, $x_1, x_2, \dots, x_n$ verilənləri sırasında median elementlərin sayından asılı olaraq aşağıdakı düsturlarla təyin edilir:

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

$$Me = x_{\frac{n+1}{2}} \quad (6)$$

$$Me = \frac{1}{2} \left[x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+2}{2}} \right] \quad (7)$$

Yəni variasiya sırasında elementlərin sayı tək ədəd olduqda median (6) düsturu ilə, əks halda isə (7) düsturu ilə tapılır.

Məsələn, bir qrupda məşq edən 15 nəfər idmançı boy sırasına görə düzülərsə, alınan sırada 8-ci idmançının boyunun uzunluğu median olacaq. Lakin idmançılar 16 nəfər olduqda isə, median 8-ci və 9-cu idmançıların boylarının uzunluqları cəminin yarısına bərabər olacaq.

Variasiya sırası intervallı olduqda isə əvvəlcə median intervalı tapılır. Median intervalı dedikdə tezliklər cəmi bütün müşahidələrin cəminin yarısından böyük olan (belə intervallar birdən çox da ola bilər) ilk interval nəzərdə tutulur. Bu intervalda tezliklərin birinci yarısı qurtarır və ikinci yarısı başlanır.

Bundan sonra isə aşağıdakı düsturla (8) medianın qiyməti hesablanır:

$$Me = x_0 + h \frac{\frac{\sum f_i}{2} - S_{m-1}}{f_m} \quad (8)$$

burada: Me - axtarılan median;

x_0 - median intervalının (medianın yerləşdiyi intervalın) aşağı sərhədi;

h - intervalın uzunluğu;

$\sum f_i$ - bütün intervalların tezliklərinin və ya sıranın bütün hədlərinin cəmi;

S_{m-1} - median intervalından əvvəlki intervalların tezliklər cəmi;

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

f_m - median intervalının tezliyidir.

İntervallı sıralarda median hesablanarkən intervalların uzunluqları müxtəlif olarsa, o halda intervalın f tezliyi əvəzinə onun sıxlığından istifadə edilir. Intervalın sıxlığı isə onun f tezliyinin h uzunluğuna bölünməsindən alınan ədədə bərabərdir.

3. Moda. Variasiya sırasının ən çox rast gəlinən (təkrarlanan) elementinə moda deyilir. Moda «Mo» kimi işarə edilir. Adətən moda müştərilərin daha çox soruşduğu, başqa sözlə desək, ən çox müştərisi olan malların (ayaqqabının, paltarın və s.) ölçüsünü təyin etmək üçün istifadə edilir.

Məsələn, tutaq ki, tələbə aprel və may ayları ərzində riyaziyyatdan aşağıdakı qiymətləri almışdır:

10, 8, 9, 9, 8, 8, 10, 8, 9 və ya artma sırası ilə düzsək
8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10.

Buradan aydın olur ki, tələbənin aldığı qiymətlər belədir:

«8» - 4 dəfə, «9» - 3 dəfə, «10» - 2 dəfə.

Bu qiymətlər sırasında 8 daha çoxdur. Deməli, moda 8-ə bərabərdir, yəni $Mo=8$.

Nəzərə almaq lazımdır ki, statistik yığımnda moda iki və ya daha çox ola bilər. Belə hallarda baxılan sıraya bimodal (iki modalı) və ya multimodal (çox modalı) sıra deyilir. Məsələn, tutaq ki, tələbənin noyabr və dekabr aylarında ingilis dilindən aldığı qiymətlər belə olmuşdur:

8, 7, 7, 7, 7, 10, 10, 9, 9, 9, 9 və ya artan sıra ilə yazsaq
7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10.

Bu halda baxılan sırada 7 və 9 eyni sayda olmaqla ən çox rast gəlinir. Yəni moda ikidir – 7 və 9.

Göründüyü kimi bu misallarda modanı tapmaq üçün əlavə hesablamalar aparmağa ehtiyac olmadı.

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

İntervallı variasiya sıralarında isə modanı tapmaq üçün əvvəlcə modal intervalı, yəni ən yüksək tezlikli (daha çox elementlər yerləşmiş) intervalı tapmaq lazımdır. Bundan sonra həmin hesablanır:

$$Mo = x_0 + h \frac{f_m - f_{m-1}}{(f_m - f_{m-1}) + (f_m - f_{m+1})} \quad (9)$$

burada, Mo - modanın qiyməti;

x_0 - modal (moda yerləşən) intervalın aşağı sərhədi;

h - intervalın uzunluğu;

f_m - modal intervalın tezliyi;

f_{m-1} - modal intervaldan əvvəlki intervalın tezliyi;

f_{m+1} - modal intervaldan sonrakı intervalın tezliyidir.

İntervallı sıralarda medianın tapılmasında olduğu kimi modanın hesablanmasında da intervalların uzunluqları müxtəlif olan zaman intervalın f tezliyi əvəzinə onun sıxlığından istifadə edilir. Intervalın sıxlığı isə onun f tezliyinin h uzunluğuna bölünməsindən alınan ədəddir.

M i s a l 4. Qəsəbə bələdiyyəsinə seçkilərlə bağlı olaraq seçicilər haqqında hazırlanmış cədvəldə verilən məlumatlara görə median və modanı tapın (cədvəl 15).

Cədvəl 15

Yaş qrupları	Seçicilər	İntervalların tezliklər cəmi ΣS_{m-1}
< 25	1080	1080
25 - 35	1350	2430 =1350+1080
35 - 45	1450	3880 =1450+1350+1080
45 - 55	1060	4940 =1060+1450+1350+1080
55 - 65	900	5840 =900+1060+1450+1350+1080
≥ 65	960	6800 =960 +900+1060+1450+1350+1080
Cəmi	6800	

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

H ə l l i. Əvvəlcə medianı hesablayaq. Odur ki, əvvəlcə median intervalının hansı yaş qrupuna daxil olduğunu tapmaq lazımdır. Bunun üçün seçicilərin ümumi sayını ikiyə bölmək kifayətdir: $\Sigma f_i / 2 = 6800 / 2 = 3400$.

Bu say isə 35 yaşına qədər olan seçicilərin ümumi sayından çox, 55 yaşına qədər olanların sayından isə azdır (cədvəl 15).

Deməli, median intervalı 35-45 yaş qrupunu göstərən intervaldır və bu interval daxilində olan variant seçicilərin ümumi sayını yarıya bölür.

Beləliklə, (8) düsturunda $\Sigma f_i / 2 = 3400$, $x_0 = 35$, $h = 10$, $S_{m-1} = 2430$, $f_m = 1450$ qiymətlərini nəzərə alsaq median aşağıdakı kimi olar:

$$Me = x_0 + h \frac{\frac{\sum f_i}{2} - S_{m-1}}{f_m} = 35 + 10 \frac{3400 - 2430}{1450} = 42.$$

Bu isə o deməkdir ki, seçicilərin birinci yarısı 42 yaşına qədər, ikinci yarısı isə yaşı 42-dən çox olan sakinlərdir.

İndi isə modanın qiymətini tapaq. Bunun üçün əvvəlcə modal intervalı təyin edək. Verilmiş cədvəldən göründüyü kimi modal interval 35 - 45 yaş qrupuna daxildir, çünki, bu intervalın tezliyi ən yüksəkdir (1450).

Odur ki, (9) düsturunda modal intervalın tezliyini - $f_m = 1450$, modal intervaldan əvvəlki intervalın tezliyini - $f_{m-1} = 1350$, modal intervaldan sonrakı intervalın tezliyini - $f_{m+1} = 1060$, modal intervalın aşağı sərhədini - $x_0 = 35$ və nəhayət, intervalın uzunluğunu - $h = 10$ nəzərə alsaq modanın qiymətini aşağıdakı kimi tapa bilərik:

$$Mo = x_0 + h \frac{f_m - f_{m-1}}{(f_m - f_{m-1}) + (f_m - f_{m+1})} =$$

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

$$= 35 + 10 \frac{1450 - 1350}{(1450 - 1350) + (1450 - 1060)} = 37.$$

Bu isə o deməkdir ki, seçicilər arasında modal yaş 37-dir.

Moda və mediandan ən çox variasiya sırasının quruluşunu (strukturunu) xarakterizə etmək üçün istifadə edilir. Ona görə də onları həm də quruluş (struktur) orta kəmiyyətləri adlandırırlar. Variasiya sırasının quruluşunu xarakterizə etmək üçün moda və mediandan başqa kvartil, desil və sentillərdən də istifadə edilir. Kvartil sıranı 4, desil 10, sentil isə 100 bərabər hissəyə bölür.

4. Səpələnmə xarakteristikaları. Orta qiymətlər variasiya sırasının elementləri haqqında tam məlumat vermir. Məsələn, orta kəmiyyətləri (seçmə orta, moda, median) eyni olan elə iki müxtəlif empirik paylanma sırasına baxa bilərik ki, onlardan birində elementlər orta qiymət ətrafında çox dar diapazonda səpələnmişlər, digərində isə bu səpələnmə genişdir. Ona görə də orta qiymətlərlə yanaşı seçmənin səpələnmə - paylanma xarakteristikalarını da hesablayırlar. Bu xarakteristikalardan bəzilərinə baxaq.

Variasiya genişliyi. Variasiya genişliyi dedikdə seçmə yığımda maksimum və minimum elementlərin fərqi nəzərdə tutulur:

$$R = x_{\max} - x_{\min} . \quad (10)$$

(10) düsturundan göründüyü kimi variasiya genişliyinin hesablanması çox sadədir. Lakin nəzərə almaq lazımdır ki, bu göstərici də geniş məlumat vermir. Belə ki, bir-birindən formasına görə ciddi şəkildə fərqlənən, lakin eyni variasiya genişliyinə malik olan çoxlu sayda paylanmalar göstərmək olar.

Variasiya genişliyi adətən praktik məsələlərin həllində kiçik həcmli (həcmi 10-dan böyük olmayan) seçmə yığımlar

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

üçün hesablanır. Məsələn, müəyyən qrup idmançıların yarışlardan sonrakı nəticələrini qiymətləndirmək üçün variasiya genişliyindən istifadə etmək olar. Doğrudan da, variasiya genişliyinə görə qrup daxilində idmançıların ən yaxşı və ən pis nəticələrinin bir-birindən nə qədər fərqləndiyini asanlıqla təyin etmək olar.

Seçmə dispersiya. Dispersiya statistikada çox mühüm göstəricidir və müxtəlif növ digər statistik təhlillərdə geniş istifadə olunur. Dispersiya verilənlərin orta qiymət ətrafında səpələnmə ölçüsünü əks etdirir. Yəni seçmə yığımından olan qiymətlərin orta qiymət ətrafında səpələnmə (orta qiymətdən meylətmə) dərəcəsini qiymətləndirmək üçün *dispersiya* və *orta kvadratik meylətmə (standart meyl)* anlayışlarından istifadə edilir.

T ə r i f. Seçmə yığımında qiymətlərin seçmə ortadan meyllərinin kvadratinın orta qiymətinə seçmə dispersiya deyilir.

Beləliklə, X təsadüfi kəmiyyətinin qiymətləri yığımından təsadüfi qayda ilə götürülmüş, həcmi n olan $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçmə yığımı üçün seçmə dispersiya aşağıdakı düsturla təyin edilir:

$$D(X) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} =$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n},$$

burada, $D(X)$ – dispersiya, x_i – lər tədqiq olunan göstəricilər (verilənlər), $\bar{x}$ – göstəricilərin orta qiyməti, n - isə seçmə yığımın həcmi və ya yığımın qiymətlərin sayıdır.

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

Göründüyü kimi dispersiya meyletmənin kvadratının orta qiymətidir və bunu tapmaq üçün cəm seçmə yığımın həcminə bölünür (11). Deməli, dispersiyanı hesablamaq üçün qiymətlərin orta kəmiyyətdən meyllərini kvadrata yüksəldərək cəmləmək və alınan nəticəni qiymətlərin sayına bölmək lazımdır. Yəni orta qiymət hesablanır, verilənlərin hər biri ilə orta qiymət arasındakı fərq tapılaraq kvadrata yüksəldilir və cəmlənir, nəhayət, alınan nəticə baxılan yığımdakı qiymətlərin sayına bölünür. Ayırı-ayrı qiymətlərlə orta qiymət arasındakı fərqlər meyletmənin ölçüsünü əks etdirir. Kvadrata yüksəltmə isə sadəcə olaraq bütün meyletmələrin müsbət ədədlərlə ifadə olunması üçündür ki, cəmləmə zamanı mənfi və müsbət meyletmələr bir-birini islah etməsinlər. Bunun ardınca sadəcə olaraq orta qiymət hesablanır. Beləliklə, meyletmə tapılır, kvadrata yüksəldilir və orta qiymət hesablanır.

Nəzərə almaq lazımdır ki, dispersiya nə qədər böyük olursa, qiymətlərin səpələnməsi də bir o qədər geniş olur.

Əgər $x_1, x_2, \dots, x_k$ seçmə yığımının elementləri $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ şərti ödənməklə müvafiq olaraq $n_1, n_2, \dots, n_k$ tezliklərinə malikdirsə, o halda seçmə dispersiya aşağıdakı düsturla hesablanır (12):

$$\begin{aligned} D(X) &= \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_k - \bar{x})^2}{n} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2}{n}, \end{aligned} \quad (12)$$

Bu göstərilənlərlə yanaşı olaraq fəsil 2-də də qeyd edildiyi kimi dispersiyanın bir çatışmaz cəhəti var ki, onun ölçüsü baxılan qiymətlərin ölçüsü ilə üst-üstə düşmür. Belə ki, dispersiyanın ölçüsü baxılan qiymətlərin ölçüsünün

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

kvadratına bərabərdir. Bu çatışmazlığı aradan qaldırmaq üçün dispersiyadan kvadrat kök alırlar (13).

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} , \quad (13)$$

burada σ (yunan hərfi *siqma*) orta kvadratik meylətməni (standart meylətməni) göstərir.

T ə r i f. Dispersiyanın kvadrat kökünə *orta kvadratik meyl* və ya *standart meyl* deyilir (13).

Dispersiyanın ölçüsündən fərqli olaraq orta kvadratik (standart) meylin ölçüsü seçmə yığıma daxil olan qiymətlərin ölçüsü ilə üst-üstə düşür. Ona görə də statistik hesablamalarda qiymətlərin səpələnməsini araşdırarkən dispersiya əvəzinə orta kvadratik meylədən, başqa sözlə, dispersiyanın kvadrat kökündən istifadə edirlər (13).

Nəzərə almaq lazımdır ki, dispersiya və ya orta kvadratik meyl (standart meyl) nə qədər böyük olarsa, tədqiq olunan qiymətlər də orta qiymətə nəzərən daha güclü səpələnmiş olurlar.

Variasiya əmsalı. Orta kvadratik meyl (standart meyl) səpələnmə ölçüsünü qiymətləndirməyə imkan verir. Lakin baxılan qiymətlərin meyllərdən nə qədər böyük olduğunu, başqa sözlə, hansı göstəricinin daha güclü dəyişdiyini yalnız orta kvadratik meyllərin müqayisəsi ilə müəyyən etmək mümkün deyildir. Bunun üçün orta kvadratik meyllə orta qiyməti müqayisə etmək lazımdır. Belə müqayisə aparmaq üçün müəyyən nisbi göstərici olmalıdır. Bu göstərici **variasiya əmsalı** adlanır:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \quad (14)$$

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

Buradan göründüyü kimi variasiya əmsalı standart meylin orta qiymətə nisbətində bərabərdir. Adətən bu göstəricini faizlə ifadə edirlər. Yəni variasiya əmsalı faizlə ölçülür:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

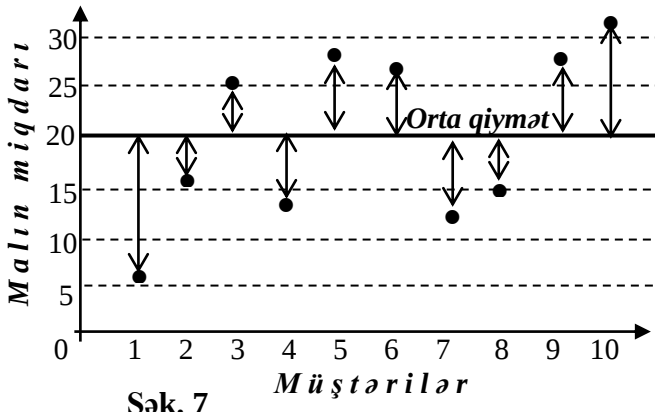
Variasiya əmsalı qiymətlərin nisbi səpələnmə ölçüsüdür, yəni məşabından və ölçü vahidindən asılı olmayaraq qiymətlərin səpələnmə dərəcəsini əks etdirir.

M i s a l 5. Cədvəl 16-da əks olunmuş qiymətlərə görə verilənlərin səpələnmə xarakteristikalarını hesablayın.

Cədvəl 16

Müştərilər	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Malın miqdarı	6	16	25	14	28	26	12	15	27	31

H ə l l i. Əyanilik üçün digər qiymətlərin orta qiymətə nəzərən yerləşmə vəziyyətlərini əks etdirən müvafiq qrafikdən istifadə etmək olar (şəkil 7). Bu qrafikdə orta qiymətdən meyllər (orta qiymət xəttindən məsafələr) iki istiqamətli oxlarla verilmişdir.



Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

Orta qiymət ədədi orta düsturu ilə hesablanır :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i =$$
$$= \frac{6+16+25+14+28+26+12+15+17+31}{10} = \frac{200}{10} = 20.$$

Variasiya genişliyi isə ən böyük göstərici ilə ən kiçik göstəricinin fərqi kimi tapılır (10):

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 31 - 6 = 25.$$

Dispersiya (11) düsturu ilə hesablanır:

$$D(X) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} =$$
$$= \frac{(6-20)^2 + (16-20)^2 + (25-20)^2 + \dots + (31-20)^2}{10} =$$
$$= \frac{592}{10} = 59,2.$$

Nəhayət, orta kvadratik meyl dispersiyanın kvadrat kökünə bərabərdir (13):

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{59,2} = 7,2.$$

M i s a l 6. Xarici firmada işləyən fəhlələrin aylıq əməkhaqqlarının paylanması cədvəldəki kimidir (şəkil 17).

Cədvəl 17

Aylıq əməkhaqqı (man)	İntervalın ortası	Fəhlələrin sayı f_i	Tezliklərin cəmi S_{m-1}
600 – 800	700	15	15
800 – 1000	900	35	50
1000 – 1200	1100	10	60
1200 – 1400	1300	8	68
1400 – 1600	1500	6	74
>1600	1700	4	78

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

Fəhlələrin aylıq əməkhaqqıları üçün orta qiyməti, modal qiyməti və medianı tapın.

H ə l l i. **a)** Çəkili ortadan istifadə edərək orta aylıq əməkhaqqını aşağıdakı kimi tapırıq:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{700 \cdot 15 + 900 \cdot 35 + 1100 \cdot 10 + 1300 \cdot 8 + 1500 \cdot 6 + 1700 \cdot 4}{78} = \\ &= \frac{79200}{78} \approx 1015 \text{ man.}\end{aligned}$$

b) Modal əməkhaqqını (9) düsturundan istifadə edərək tapaq:

$$\begin{aligned}Mo &= x_0 + h \frac{f_m - f_{m-1}}{(f_m - f_{m-1}) + (f_m - f_{m+1})} = \\ &= 800 + 200 \frac{35 - 15}{(35 - 15) + (35 - 10)} = 800 + 200 \cdot 0,4(4) \approx 889 \text{ man.}\end{aligned}$$

c) İndi isə median əməkhaqqını tapaq. Bunun üçün (8) düsturundan istifadə edək:

$$\begin{aligned}Me &= x_0 + h \frac{\frac{\sum f_i}{2} - S_{m-1}}{f_m} = 800 + 200 \frac{78/2 - 15}{35} = \\ &= 800 + 200 \cdot 0,69 \approx 938 \text{ man.}\end{aligned}$$

M i s a l 7. Seçmə yığım aşağıdakı kimi verilmişdir:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Seçmə dispersiyanı və orta kvadratik meyli tapın.

H ə l l i. Aydındır ki, seçmə yığımın həcmi $n = 50$ -dir. Onda seçmə ortanı tapmaq olar:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 20 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 5}{50} = 2.$$

Deməli, seçmə dispersiya (12) düsturu ilə hesablanır:

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

$$D(X) = \frac{(1-2)^2 \cdot 20 + (2-2)^2 \cdot 15 + (3-2)^2 \cdot 10 + (4-2)^2 \cdot 5}{50} = 1.$$

Orta kvadratik meyl isə

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = 1 \text{ olur.}$$

III fəslə aid çalışmalar

1. Seçmə verilənlər tezliklərin paylanması şəklindədir:

a)	x_i	2	3	4	6
	n_i	7	4	6	3
b)	x_i	4	7	8	12
	n_i	5	2	3	10

Nisbi tezliklərin paylanmasını tapın.

2. Seçmə paylanmasına görə tezliklər poliqonunu qurun:

a)	x_i	2	3	5	6	
	n_i	10	15	5	20	
b)	x_i	15	20	25	30	35
	n_i	10	15	30	20	25

3. Seçmə paylanmasına görə nisbi tezliklər poliqonunu qurun.

a)	x_i	2	4	5	7	10
	w_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

b)	x_i	20	40	65	80
	w_i	0,1	0,2	0,3	0,4

c)	x_i	1	4	5	8	6
	w_i	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

4. Statistik sıra verilir. Nisbi tezliklər poliqonunu qurun.

x_i	15	16	17	18	19
n_i	1	5	6	5	3

5. İntervallı statistik sıra verilir:

x_i	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
n_i	1	2	7	18	12

Nisbi tezliklər histqramını qurun.

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

6. Verilmiş seçmə paylanmasına görə tezliklərin histoqramını qurun. Seçmənin həcmi $n=95$ -dir.

İntervalın nömrəsi i	İntervallar $x_i - x_{i+1}$ ($l = 5$)	Intervalin tezliklər cəmi n_i	İntervaldakı tezliyin sıxlığı $h_i=n_i/l$
1	1 - 6	10	2
2	6 - 11	15	3
3	11 - 16	40	8
4	16 - 21	25	5
5	21 - 26	5	1

7. Aşağıda verilmiş seçmə paylanmasına görə tezliklər histoqramını qurun:

İntervalın nömrəsi i	İntervallar $x_i - x_{i+1}$ ($l=5$)	Intervalin tezliklər cəmi n_i	İntervalda tezliyin sıxlığı $h_i =n_i/l$
1	2 - 7	5	
2	7 - 12	10	
3	12 - 17	25	
4	17 - 22	6	
5	22 - 27	4	

Göstəriş: Əvvəlcə hər bir i -ci intervaldakı tezlik sıxlığını ($h_i - n_i$) taparaq cədvəlin axırncı sütununu doldurun.

8. Gün ərzində mağazada satılan 45 cüt kişi ayaqqabısı aşağıdakı ölçülərdə olmuşdur:

39 41 40 42 41 40 42 44 40 43 42 41 43 39 42
41 42 39 41 37 43 41 38 43 42 41 40 41 38 44
40 39 41 40 42 40 41 42 40 43 38 39 41 41 42

Bu verilənlərə görə diskret variasiya sırasını qurun və müvafiq poliqonu çəkin.

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

9. Verilmiş seçmə paylanmasına görə nisbi tezliklərin histoqramını qurun:

a)

İntervalın nömrəsi i	İntervallar $x_i - x_{i+1}$ ($l=5$)	İntervalın tezlikləri cəmi n_i	Nisbi tezlik $w_i = \frac{n_i}{n}$
1	10 - 15	2	
2	15 - 20	4	
3	20 - 25	8	
4	25 - 30	4	
5	35 - 40	2	
		$n = \sum n_i = 20$	

b)

İntervalın nömrəsi i	İntervallar $x_i - x_{i+1}$ ($l=3$)	İntervalın tezlikləri cəmi n_i	Nisbi tezlik $w_i = \frac{n_i}{n}$
1	2 - 5	6	
2	5 - 8	10	
3	8 - 11	4	
4	11 - 14	5	
		$n = \sum n_i = 25$	

Göstəriş: Əvvəlcə hər bir i -ci intervaldakı tezliyə uyğun olan nisbi tezliyi ($w_i = n_i/n$) tapın və cədvəlin axıncı sütununa yazın.

10. Qəbul imtahanlarında 60 nəfər abituriyentin topladığı ballar aşağıdakı kimi olmuşdur:

20 19 22 24 21 18 23 17 20 16 15 23 21 24 21
 18 23 21 19 20 24 21 21 20 18 17 22 20 16 22
 20 17 21 17 19 20 20 21 18 22 23 21 25 22 20
 19 21 24 23 21 19 22 21 19 20 23 22 25 21 21 .

Paylanma sırasını qurun və poliqonu çəkin.

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

11. Avtomobil Bakıdan Gəncəyə gedərkən 120 km/s sürətlə hərəkət etdi və Gəncədən Bakıya qayıdarkən isə onun sürəti 40 km/s az oldu. Avtomobilin orta sürətini tapın. (c. 96 km/s).

12. Bakıdan Şamaxıya hərəkət edən avtomobilin sürəti yolun birinci yarısında 120 km/s, qalan $\frac{1}{2}$ hissəsində isə 40 km/s olmuşdur. Avtomobilin orta sürətini tapın. (c. 60 km/s).

13. Mühafizə xidmətində çalışan polis işçilərinin müxtəlif yaş qruplarına uyğun sayını əks etdirən aşağıdakı cədvələ görə median və modanı tapın:

Yaş qrupları	Polis işçilərinin sayı	İntervalların tezlikləri cəmi ΣS_{m-1}
< 20	346	346
20 – 25	872	1218= 872+346
25 – 30	1054	2272= 1054+872+346
30 – 35	781	3053=781+1054+872+346
35 – 40	212	3265= 212+781+1054+872+346
40 – 45	121	3386=121+212+781+1054+872+346
≥ 45	76	3462=76+121+212+781+1054+872+346
Cəmisi	3462	

14. Cədvəldə verilmiş məlumatlara əsasən qiyabi şöbədə təhsil alan 24 nəfər tələbənin orta yaşını, dispersiyanı və variasiya genişliyini tapın:

Nö	Yaş (il)	Nö	Yaş (il)	Nö	Yaş (il)	Nö	Yaş (il)
1	22	7	18	13	20	19	20
2	21	8	19	14	19	20	19
3	19	9	20	15	18	21	18
4	18	10	18	16	20	22	18
5	20	11	22	17	22	23	21
6	19	12	20	18	20	24	22

15. Eyni ixtisas üzrə iki müxtəlif qrupda təhsil alan tələbələrin qış imtahan sessiyasında informatika fənnindən topladığı ballar aşağıdakı cədvəldə verilir:

Fəsil 3. Riyazi statistikanın elementləri

I qrup		II qrup	
Tələbələr	Bal	Tələbələr	Bal
Səid	100	Adil	61
Fidan	100	Afət	59
Mehri	100	Aytən	60
Zenfira	100	Murad	63
Sevda	37	Mahir	60
Sevinc	39	Məmməd	66
Tahir	38	Anar	70
Tofiq	37	Solmaz	67
Əhməd	40	Sevil	60
Valeh	39	Səməd	64

Hər qrup üzrə orta balı, variasiya genişliyini, dispersiyanı və orta kvadratik meyli tapın.

16. İki qonşu rayonun fermer təsərrüfatlarında üzüm sahələrinin hər hektarından götürülən məhsulun miqdarı cədvəldə əks olunduğu kimidir:

A rayonu		B rayonu	
Təsərrüfatlar	Məhsuldarlıq (sentnerlə)	Təsərrüfatlar	Məhsuldarlıq (sentnerlə)
1	158	1	94
2	159	2	98
3	155	3	96
4	53	4	98
5	48	5	99
6	54	6	95
7	52	7	99

Bu məlumata görə hər rayon üzrə orta məhsuldarlıq, variasiya genişliyi, dispersiya və orta kvadratik meyli tapın.

Ə D Ə B İ Y A T

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. ГТТИ, 1955.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Уч. пособие - М.: Высш. шк., 2002.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие - М.: Высш. шк., 2003.
4. Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. «Статистика», 1970.
5. Vəliyev B.. Ehtimal nədir. Bakı, Gənclik, 1967
6. Mehdiəliyev A.İ. Statistik funksiyalar. Bakı, 2010.
7. Mehdiəliyev A.İ. EXCEL proqramının statistik funksiyaları. <http://statistical-functions-aga.blogspot.com/>
8. Hüseynova A. M. Statistikanın ümumi nəzəriyyəsi: dərs vəsaiti, Bakı, 2008.